

UNIwersytet Jagielloński  
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej  
Instytut Fizyki



Krzysztof Giergiel  
Nr albumu: 1061900

**Wyznaczanie miejsca i czasu interakcji  
kwantu gamma w paskach  
styntylacyjnych przy użyciu metody  
największej wiarygodności**

Praca licencjacka  
na kierunku fizyka

OPIEKUN PRACY  
prof. dr hab. Paweł Moskal  
Instytut Fizyki

KRAKÓW 2014

### Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami. Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Kraków, dnia

Podpis autora pracy

### Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Kraków, dnia

Podpis kierującego pracą

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Detektor</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Algorytm</b>	<b>7</b>
3.1	Rekonstrukcja . . . . .	7
3.2	Konstrukcja $L(\vec{\theta})$ . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Rozkłady ekstremalne</b>	<b>15</b>
4.1	Model . . . . .	15
4.2	Rozkłady ekstremalne . . . . .	17
4.3	Dopasowanie parametrów rozkładów ekstremalnych . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Korelacje</b>	<b>25</b>
5.1	Uśrednienie Macierzy Kowariancji . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Wyniki</b>	<b>31</b>
6.1	Rekonstruowane zdarzenia . . . . .	31
6.2	Wyniki rekonstrukcji . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>36</b>

# 1 Wstęp

Celem tej pracy jest opracowanie algorytmu rekonstrukcji czasu  $t$  oraz miejsca  $x$  interakcji kwantów gamma w detektorze paskowym. Układ wyróżnia się budową - jest złożony z długiego -  $l = 30 \text{ cm}$  - paska z organicznego materiału scyntylacyjnego, owiniętego folią metalową, zakończonego dwoma fotopowielaczami. Detektor ten jest podstawową jednostką budowy urządzenia J-PET. Użycie scyntylatorów z materiału organicznego nie jest w tej chwili stosowane w żadnych urządzeniach tomografii pozytonowej. Opis układu wraz z motywacją jego konstrukcji znajduje się w sekcji 2 i jest opisany w artykułach [6, 7].

Algorytm rekonstrukcji korzysta z danych, które będą dostępne w układzie pomiarowym tomografu [5] - zbioru czasów przekroczenia progów stałego napięcia przez sygnał z fotopowielaczy ( $t_L$  i  $t_P$  fotopowielacze oznaczone jako  $L$  i  $P$ ) oraz zebrany ładunek ( $Q_L$  i  $Q_P$ ). Dla zbioru pomiarów tych parametrów skonstruowana została procedura kalibracji bazy danych używanych do rekonstrukcji. Baza danych służy do określenia prawdopodobieństwa zdarzenia o zadanym wektorze wartości pomiarów - algorytm maksymalizuje prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia, względem parametrów  $t$  oraz  $x$  - określając ich najbardziej prawdopodobne wartości. Jest to metoda największej wiarygodności opisana w sekcji 3.

Najtrudniejszym zadaniem w wykorzystaniu metody największej wiarygodności jest przygotowanie funkcji wiarygodności - określającej prawdopodobieństwa warunkowe dla zbiorów mierzonych parametrów od zmiennych opisujących różne zdarzenia. Trudnością zadania było stworzenie funkcji wiarygodności zależnej od parametrów  $t$  oraz  $x$  dysponując danymi doświadczalnymi, dla których znane jest tylko położenie zdarzenia. Charakterystyczne dla tej pracy jest użycie rozkładów ekstremalnych - określających prawdopodobieństwo emisji pierwszego elektronu z fotokatody danego fotopowielacza w zadanych warunkach  $t$ ,  $x$  do stworzenia bazy danych. Konstrukcja została opisana w sekcji 4.

Pośrednim wynikiem było stworzenie macierzy kowariancji i korelacji dla czasów rejestrowanych przez dyskryminatory mierzące czasy przekroczenia 9-ciu progów stałego napięcia w zadanych warunkach  $t$ ,  $x$ . Wyniki te i ich analiza zostały opisane w sekcji 5.

Wybrana konstrukcja bazy danych pozwala na uwzględnienie zmiany kształtu sygnałów w zależności od miejsca zdarzenia. Uzyskano w ten sposób większą dokładność rekonstrukcji niż metodami korzystającymi z samej różnicy czasów reakcji progów pomiędzy fotopowielaczami, znanej pod nazwą czasu przelotu TOF. Algorytm został użyty do rekonstrukcji pomiarów, a wyniki zaprezentowane są w zależności od liczby symulowanych progów stałego napięcia użytej w rekonstrukcji. Podsumowanie efektów działania algorytmu, pozwalające na oszacowanie liczby progów, wymaganej w konstruowanym tomografie jest zebrane w sekcji 6. Podsumowanie pracy jest zawarte w sekcji 7. Opisane tam zostały zalety i wady

użytej metody, możliwości zmiany implementacji algorytmu pozwalające na jego optymalne wykorzystanie w różnych sytuacjach i możliwe modyfikacje w metodzie zbierania danych pomiarowych oraz implementacji algorytmu pozwalające na uzyskanie potencjalnie lepszych wyników.

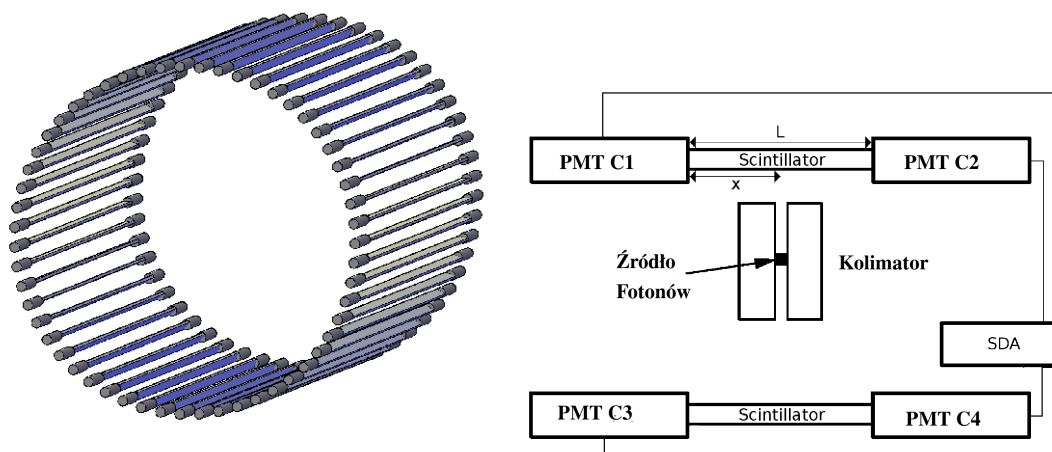
## 2 Detektor

Pomiary wykorzystane w tej pracy zostały wykonane przez grupę J-PET. Metoda wykonania podobnego doświadczenia jest opublikowana w [12]

Długie detektory paskowe są podstawową jednostką budowy nowego rodzaju tomografu, którego schemat jest pokazany na rys. 1, pochodzącego z artykułu [11]. Tomograf ten korzysta z plastikowych scyntylatorów umożliwiającą konstrukcję długiej "beczki" modułów pasków - zapewniając większą niż aktualnie stosowane urządzenia akceptancję geometryczną detektora.

Układ pomiarowy składał się z dwóch prostokątów z plastikowego materiału scyntylacyjnego BC-420 umieszczonych przeciwległe, tak jak jest to pokazane na rysunku 1. Paski były zakończone fotopowielaczami Hamamatsu R9800 [2]. Źródło  $^{22}\text{Na}$  umieszczone w kolimatorze było ustawione tak, aby kwanty gamma o niskiej energii (511MeV), pochodzące z anihilacji elektronu z pozytonem, padały na paski w tej samej pozycji wzdłuż ich długości. Paski były umieszczone węższą ścianką względem siebie. Wymiar pojedynczego paska to  $0.5\text{ cm} \times 1.9\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ . Szerokość kolimacji wiązki fotonów padających na pasek wynosiła  $2\text{ mm}$ .

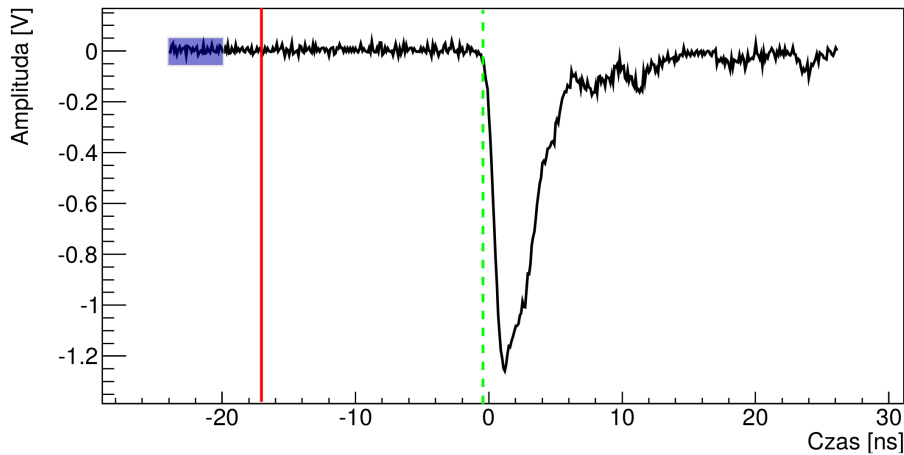
Dane były zbierane i zapisywane przez urządzenie Serial Data Analyzer Le Croy SDA6000A z krokiem 100ps. Zbierane sygnały narastały w stronę ujemnych wartości napięcia. Mówiąc w dalszej części o maksimach sygnału i przekroczeniu zadanych progów będę pisać o jego najniższych wartościach, lub o przejściu przez próg stałego napięcia od góry. Przykładowy sygnał jest umieszczony na rysunku 2



(a) Schemat jednej warstwy tomografu J-PET[1].

(b) Schemat układu doświadczalnego.

Rys. 1: Schematy detektorów.



Rys. 2: Przykładowy zaakceptowany sygnał użyty do tworzenia bazy danych. Zieloną przerywaną linią zaznaczono czas przecięcia najniższego symulowanego progu. Półprzezroczysty prostokąt zaznacza część sygnału użytą do określenia poziomu zerowego. Na czerwono zaznaczono linię minimalnego czasu, poniżej którego pomiar był odrzucany, jako mogący wpłynąć na obliczenie poziomu zerowego.

Pomiary były zapisywane jeśli dla fotopowielaczy C1 i C3 amplituda sygnału przekroczyła wartość  $V_t = -110 \text{ mV}$ . W tej pracy wykorzystano tylko dane z jednego z pasków (sygnały C1 i C2). Fotopowielacze były zasilane napięciami 2224 V dla C1 oraz 2407 V dla C2, opisanych dalej jako odpowiednio sygnały Lewe i Prawe. Odrzucono dane, w których wysokość sygnału na fotopowielaczu, który nie brał udziału w wyzwaniu zapisu nie przekraczała wartości  $V_t = -110 \text{ mV}$ . Miało to na celu symulowanie wyzwania na parze detektorów z tego samego paska, przez co baza danych nie będzie obciążona systematycznie przez nierówne warunki zapisu sygnałów w zależności od fotopowielacza. Pomiary wykonywano przesuwając źródło co 3mm zaczynając od pozycji oddalonej o 3mm od krawędzi paska i wykonując 99 serii, kończąc na pozycji 297mm. Sygnały zostały podzielone na odrębne 2 zbiory. Pierwszy zawierał 3000 kolejnych pomiarów dla każdej pozycji i został użyty do stworzenia funkcji wiarygodności. Drugi zawierający kolejne 1500 pomiarów z serii został użyty do przetestowania działania algorytmu rekonstrukcji. Do rekonstrukcji używane były tylko zbiory wartości czasów zmierzonych na symulowanej elektronice stałopoziomowej  $\{t_L\}$ ,  $\{t_p\}$  oraz wartości ładunków  $Q_L, Q_P$ . Poziom zera został uwzględniony przez obliczenie średniej wartości napięcia dla pierwszych 2ns pomiaru i odjęcie tej wartości od całości danego pomiaru. Wartości ładunków były obliczane jako całka pod sygnałem w  $pVs$  i przeliczane na ładunek w  $pC$  przez podzielenia przez oporność układu elektrycznego rozładowu-

jącego fotopowielacz  $r = 50 \Omega$ . Poniżej zapisano obliczenia zebranego ładunku:

$$Q = \frac{1}{r} \sum_i (V_i - V_0) * \Delta t \quad (1)$$

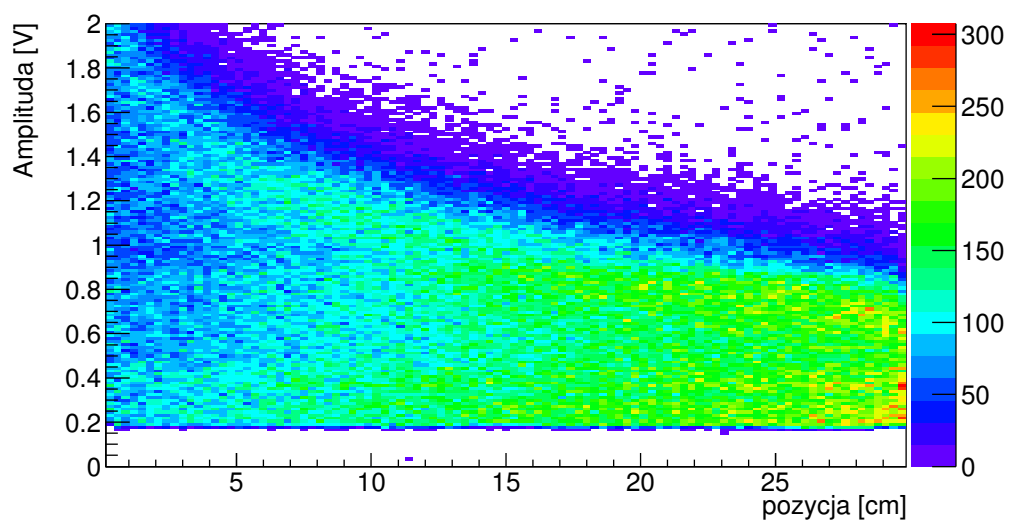
gdzie  $V_i$  to zmierzone wartości napięcia,  $\Delta t = 100 \text{ ps}$  to krok pomiaru, a  $V_0$  to obliczony poziom zera.

Pomiary nie były akceptowane, jeśli przecięcie pierwszego z symulowanych progów następowало w pierwszych  $3.5 \text{ ns}$ , jako że mogło to wpłynąć na obliczenie poziomu zerowego. Działanie dyskryminatorów stałopoziomowych było symulowane przez obliczanie czasu pierwszego przecięcia progów o zadanym napięciu, na zboczu narastającym sygnału. Przy obliczeniu punktu przecięcia stosowano interpolację liniową pomiędzy sąsiednimi punktami pomiarowymi. Zbiory  $\{t\}$  były symulowane dla progów na wysokościach

$\{0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20, 0.24, 0.28, 0.32, 0.36, 0.40, 0.44\} [V]$ . Dla porównania amplitudy sygnałów dla lewego fotopowielacza w zależności od położenia zostały przedstawione na rys. 3. W tej pracy nie symulowano zbocza opadającego. Czasy przecięcia progów dla zbocza opadającego są obarczone większymi niepewnościami. Ponadto czas wykonania programów oraz zużycie pamięci komputera przy aktualnej implementacji algorytmu byłoby zbyt duże na jednoczesną analizę zbocza narastającego i opadającego.

Algorytmy korzystały ze zbioru wartości  $\{t\}$  i  $\{Q\}$  obliczonych dla poszczególnych sygnałów. Taka konstrukcja pozwoli na kalibrację rekonstrukcji w docelowym urządzeniu z dyskryminatorem i integratorem, bez potrzeby pomiarów oscyloskopem.





Rys. 3: Amplitudy sygnałów dla pomiarów zebranych w seriach w różnych pozycjach.

## 3 Algorytm

Pojedyncze zdarzenie - rozproszenie kwantu gamma w materiale scyntylatora jest opisane przez 3 parametry:

- $x$  - pozycja wzdłuż paska
- $t$  - czas zdarzenia
- $E$  - zdeponowana przez kwant  $\gamma$  energia

Pogrubiłone parametry zdarzenia  $x$  i  $t$  są wartościami niezbędnymi do rekonstrukcji położenia źródła pary kwantów gamma. Energia nie jest parametrem używanym w rekonstrukcji obrazów przez tomograf. Została wyszczególniona, jako że od niej zależy rozkład mierzonych ładunków. Mierzone są ładunki, od których bezpośrednio zależy kształt sygnałów, więc rekonstrukcja  $t$  i  $x$  nie wymaga znajomości parametru  $E$ . Mechanizm zdarzenia to w większości rozproszenie Comptona [4]. Położenia  $y$  i  $z$  nie są znane z danych pomiarowych, a z symulacji i rozważań geometrycznych dla pasków prostokątnych wynika, że mają niemierzalny wpływ na sygnały [8].

### 3.1 Rekonstrukcja

Głównym celem tej pracy jest stworzenie algorytmu estymacji  $x$  i  $t$ . Wymagany jest dobry estymator parametrów rekonstrukcji korzystający z wektora wielkości mierzonych. Prawdopodobieństwo warunkowe zmierzania wektora wielkości  $\vec{A}$  pod warunkiem, że zdarzenie zaszło w pozycji  $x$  i czasie  $t$  opisano jako:

$$p(\vec{A}|x, t) \tag{2}$$

**Metoda największej wiarygodności** zawiera się w założeniu, że obserwowane w próbie wyniki są najbardziej prawdopodobne ze wszystkich możliwych[?]. Nie ma przyczyn podejrzewać, że rozkład nie jest rozkładem regularnym, więc słuszne jest jej zastosowanie [16]. Rekonstrukcja polega na znalezieniu takich parametrów, dla których funkcja wiarygodności jest maksymalna.

Funkcja wiarygodności jest zdefiniowana jako:

$$L(\vec{\theta}) = p(\vec{A}|\vec{\theta}) \tag{3}$$

gdzie  $\vec{\theta}$  zawiera szukane parametry. Szukane są takie parametry, dla których zachodzi jeden z identycznych warunków:

$$L(\vec{\theta}) = \max \tag{4}$$

$$\ln(L(\vec{\theta})) = \max \tag{5}$$

Metoda ta przedstawia następujące trudności:

- Zwyczajowe poszukiwanie maksimum jako miejsca zerowania pierwszej (i wyższych) pochodnych nie jest tu wykonalne. W konstruowanej bazie dane umieszczone są w histogramach, a analityczna postać funkcji  $L(\vec{\theta})$  nie jest znana. W tej pracy maksimum znajdowane jest przez przeszukiwanie przestrzeni parametrów:  $x$  od  $0.3\text{ cm}$  oraz czasów w zależności od położenia  $t_{0L} - \frac{c}{n} \cdot x - 0.27\text{ ns}$ . Zakres przeszukiwania to 99 przedziałów  $\Delta x = 3\text{ mm}$  oraz 80 przedziałów czasu  $\Delta t = 25\text{ ps}$ . Przeszukiwanie przestrzeni parametrów można znacznie zawęzić, na przykład wykonując najpierw rekonstrukcję metodą TOF, a potem przeszukując parametry w pobliżu uzyskanego tak wyniku. W tej pracy nie było potrzeby szybkiej implementacji tej metody, więc takie podejście nie było użyte. Przykładowe wartości funkcji wiarygodności są umieszczone na rys. 4.
- Mierzone wartości są w nietrywialny sposób zależne, więc rozkład może być wielowymiarowy i trudny do analizy (18 progów - po 9 dla każdego fotopowielacza oraz 2 parametry  $t$  i  $x$ ). Szukane jest jego maksimum, w kierunkach dwóch parametrów. Bez żadnych założeń upraszczających należałoby stworzyć 20 wymiarowe histogramy, dla których zużycie pamięci i liczba pomiarów wymaganych do zebrania odpowiedniej statystyki byłaby ogromna. Istnieją metody nie wymagające tworzenia histogramów, jedynie wielowymiarowych posortowanych tablic napełnionych danymi [17]. Jednak nie mają one zastosowania, ze względu na metodę tworzenia bazy danych, która wymaga w jednym z kroków wykonania dekonwolucji w oparciu o histogramy. Można znacznie zmniejszyć wymiarowość problemu co jest opisane poniżej.

Dowolny wielowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa można wyrazić w języku prawdopodobieństwa warunkowego:

$$p(\vec{A}|\theta) = p_1(a_1|\theta) \cdot p_2(a_2|a_1, \theta) \cdot p_3(a_3|a_2, a_1, \theta) \cdot \dots \cdot p_n(a_n|a_{n-1}, \dots, a_1, \theta) \quad (6)$$

gdzie  $p_i$  są składowymi rozkładami prawdopodobieństwa oraz  $a_i$  są składowymi wektora  $\vec{A}$ . Jest to dalej tak samo skomplikowana wielowymiarowa funkcja. Poniższa lista zawiera kolejne multiplikatywne składowe takiego rozkładu funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Rozpatrując fizyczną podstawę stojącą za poszczególnymi składowymi wektora pomiarów można zauważyć, że część z nich będzie niezależna. Kolejność ich występowania, będzie nieprzypadkowa. Pierwsze zapisane będą zmienne, które z fizycznego punktu widzenia są bardziej podstawowe dla rozważanego procesu. Przez przemnożenie wszystkich składowych otrzymać można szukany rozkład  $p(\vec{A}|x, t)$ :

- $a(Q_L|x)$  -  $Q_L$  zależy od energii zdeponowanej w scyntylatorze oraz, z powodu absorpcji wyświecanych przez scyntylator fotonów, zależy także od miejsca depozycji energii. Wybór  $Q_L$ , a nie  $Q_P$  jest arbitralny.
- $b(Q_P|Q_L, x)$  -  $Q_P$  jest związane z  $Q_L$  przez ukryty parametr energii.
- $c(t_{L0}|Q_L, t, x)$  - czas na progu najbliższym poziomemu zera jest zależny od ilości fotonów - ładunku.
- $d(t_{P0}|Q_P, t, x)$  - analogicznie dla drugiego sygnału z pary.
- $e(t_{SPLn}|t_{Ln-1}, \dots, t_{L1}, Q_L, t, x)$  - czasy zmierzone na progach o wyższych napięciach są skorelowane z czasami zmierzonymi na progach niższych.
- $f(t_{SPPn}|t_{Pn-1}, \dots, t_{P1}, Q_P, t, x)$  - analogicznie z drugiej strony.

Robiąc powyższe założenia można zredukować liczbę wymiarów dla najtrudniejszego z rozkładów z 20 do 12. Funkcja wiarygodności jest wówczas postaci:

$$L(\vec{\theta}) = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \left( \prod_i e_i \right) \cdot \left( \prod_j f_j \right) \quad (7)$$

gdzie iloczyny po indeksach  $i$  oraz  $j$  przebiegają od 1 do liczby progów.

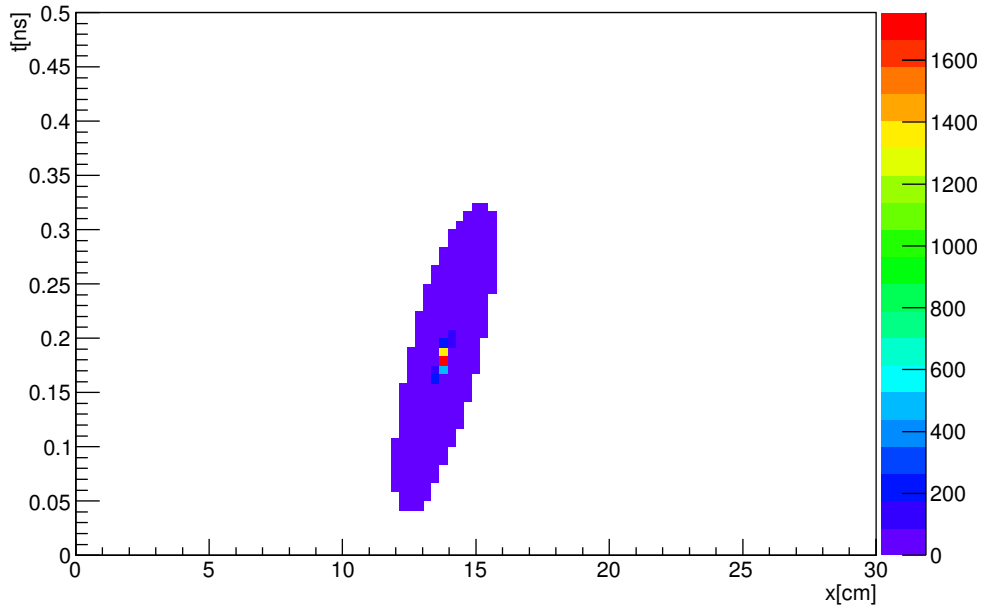
Dla mniejszej liczby analizowanych progów byłoby to wystarczające ułatwienie. Aby zmniejszyć trudność problemu założono, że czasy zmierzone na poszczególnych progach pochodzą z wielowymiarowego rozkładu normalnego. Ze względu na małą granulację histogramów (wypełnionych zgodnie z statystyką Poissonowską) nie zostały opisane testy statystyczne mające potwierdzić tą hipotezę. Założenie to prowadzi do zastąpienia rozkładów  $c$ ,  $e$  oraz  $d$ ,  $f$  przez odpowiednie rozkłady postaci:

$$f_{\mathbf{a}}(a_1, \dots, a_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{a} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (8)$$

gdzie  $\mathbf{a}$  to wektor zmierzonych czasów na jednym z fotopowielaczy,  $k$  to liczba wymiarów,  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, Q, x)$  to średnia rozkładu, a  $\Sigma = \Sigma(t, Q, x)$  to macierz kowariancji. Skonstruowana tak funkcja wiarygodności:

$$L(\vec{\theta}) = a \cdot b \cdot f_L \cdot f_P \quad (9)$$

jest podstawą do rekonstrukcji.



Rys. 4: Przykładowy wynik przeszukiwania przestrzeni stanów. Wartości histogramu to obliczone funkcje wiarygodności. Poprawna pozycja to 138mm.

### 3.2 Konstrukcja $L(\vec{\theta})$

Konstrukcja funkcji  $a(Q_L|x)$  jest równoważna wykonaniu histogramu dwuwymiarowego: ładunku w funkcji położenia. Ilustracja 5 zawiera histogramy ładunków na lewym i prawym fotopowielaczu (tylko lewy jest używany w rekonstrukcji). Dla określenia wartości funkcji  $b(Q_P|Q_L, x)$  wykonano histogramy dwuwymiarowe  $p(Q_L|Q_P)$  dla każdej serii pomiarowej  $x$ . Histogramy te dla kilku pozycji są pokazane na rys. 6. Przed użyciem do rekonstrukcji histogramy były przeskalowane, tak aby posiadały dwukrotnie mniejszą liczbę przedziałów w kierunkach  $Q_L$  i  $Q_P$ . Czterokrotne zwiększenie statystyki dla każdego z nowych przedziałów sprawia, że odczytywane z histogramu wartości  $b(Q_P|Q_L, x)$  są bardziej gładkie.

Wygenerowano także histogramy rozkładów warunkowych  $p(t_{0L} - t_{0P}|x)$  w sposób identyczny do  $a(Q_L|x)$ . Jest to funkcja używana w rekonstrukcji TOF oraz do kalibracji parametrów rozkładów ekstremalnych niezbędnych do stworzenia funkcji  $f_L$  oraz  $f_P$ . Funkcja ta jest użyta po przemnożeniu przez  $a$  i  $b$ , jako podstawa do porównania opisanej metody z metodą TOF. Wyniki znajdują się na rys. 7.

Wygenerowanie histogramów dla funkcji  $f_L$  oraz  $f_P$  jest trudniejsze. Zmierzone dane nie posiadają informacji na temat czasu zdarzenia. Można tutaj wykorzystać pętle iteracji (bootstrapping) - najpierw rekonstruować czas zdarzenia, żeby stwo-

rzyć funkcje  $f$ , która z kolei służyłaby poprawieniu rekonstrukcji czasu zdarzenia. Wymagałoby to znalezienia funkcji oceny rekonstrukcji czasów i zapewnienia zbieżności takiej procedury.

W tej pracy korzystano z innej metody. Dla czasów  $t_i$  i  $t_j$  zmierzonych odpowiednio na progach  $i$ -tym i  $j$ -tym na podstawie hipotezy na postać funkcyjną  $p(t_{0P}|Q_P, t, x)$  oraz histogramów stworzonych dla  $p(t_{iP} - t_{0P}, t_{jP} - t_{0P}|Q_P, t, x)$ ,  $i \neq j$  można dokonać rekonstrukcji histogramów  $p(t_{iP}, t_{jP}|Q_P, t, x)$ ,  $i \neq j$ . Analogicznie postępowano dla sygnałów z drugiego fotopowielacza. Tworzenie histogramów różnicy czasów jest wartościowe, bo można zauważyć, że:

$$p(t_{iP}|Q_P, t, x) = p(\overline{t_{iP}} + t|Q_P, x) \quad (10)$$

gdzie  $p(\overline{t_{iP}}|Q_P, x)$  jest rozkładem  $p(t_{iP}|Q_P, t = 0, x)$  - czas zdarzenia wpływa na rozkład  $t_{iP}$  jedynie przesuując go. Można zauważyć dla histogramów następujące ich postacie są równoważne:

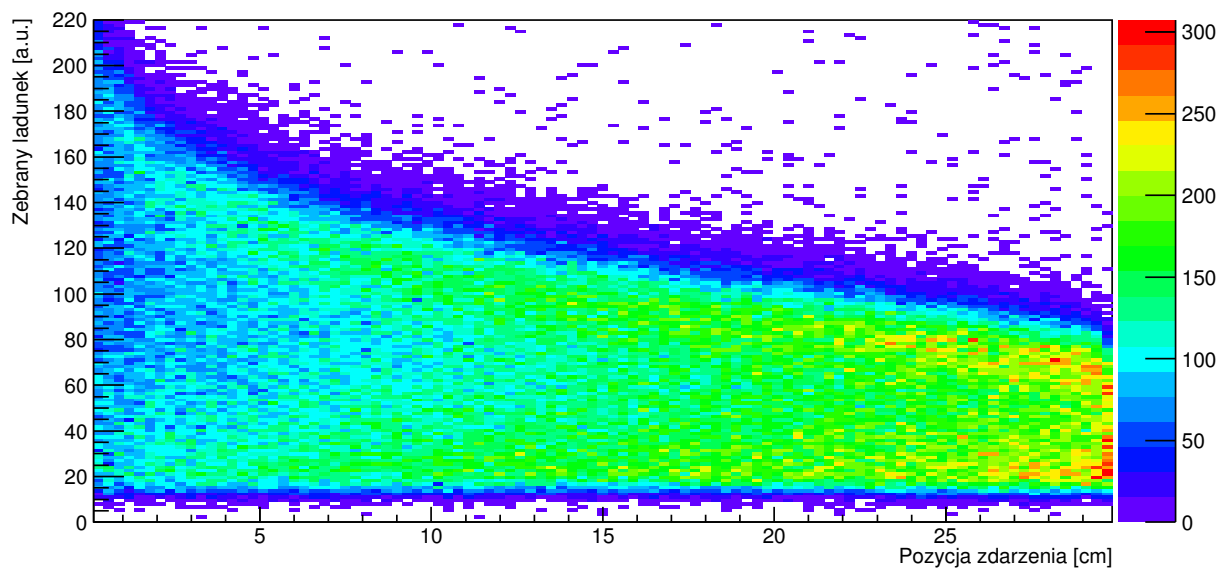
$$p(t_{iP} - t_{0P}, t_{jP} - t_{0P}|Q_P, t, x), i \neq j \quad (11)$$

$$p((\overline{t_{iP}} + t) - (\overline{t_{0P}} + t), (\overline{t_{jP}} + t) - (\overline{t_{0P}} + t)|Q_P, t, x), i \neq j \quad (12)$$

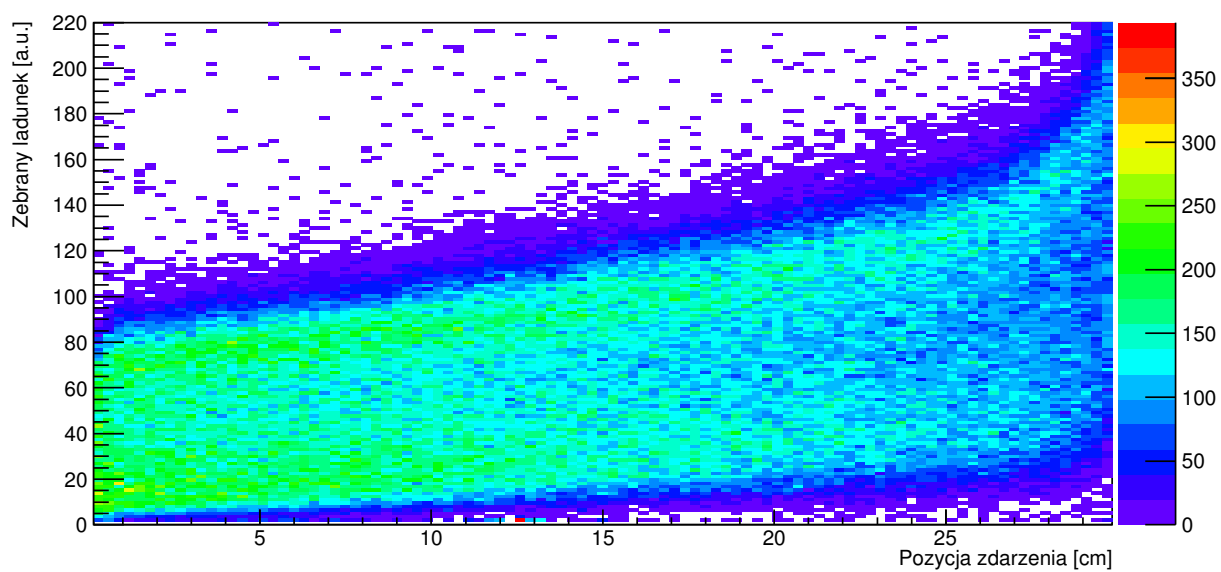
$$p(\overline{t_{iP}} - \overline{t_{0P}}, \overline{t_{jP}} - \overline{t_{0P}}|Q_P, x), i \neq j \quad (13)$$

Histogramy  $p(t_{iP} - t_{0P}, t_{jP} - t_{0P}|Q_P, t, x)$  nie zależą więc od czasu zdarzenia. Wystarczy, więc znać  $p(t_{0P}|Q_P, 0, x) = p(\overline{t_{0P}}|Q_P, x)$ , aby móc zrekonstruować omawianą funkcję  $p(t_{iP}, t_{jP}|Q_P, x) = p(\overline{t_{iP}} + t, \overline{t_{jP}} + t|Q_P, t, x)$ ,  $i \neq j$ .

Wyliczenie postaci  $p(t_{0P}|Q_P, t, x)$  jest opisane w sekcji 4. Dekonwolucja prowadząca do funkcji  $p(t_{iP}, t_{jP}|Q_P, t, x)$ ,  $i \neq j$  oraz jej wyniki - macierze kowariancji oraz wektory średnich dla  $f_P$  i  $f_L$  są opisane w sekcji 5.

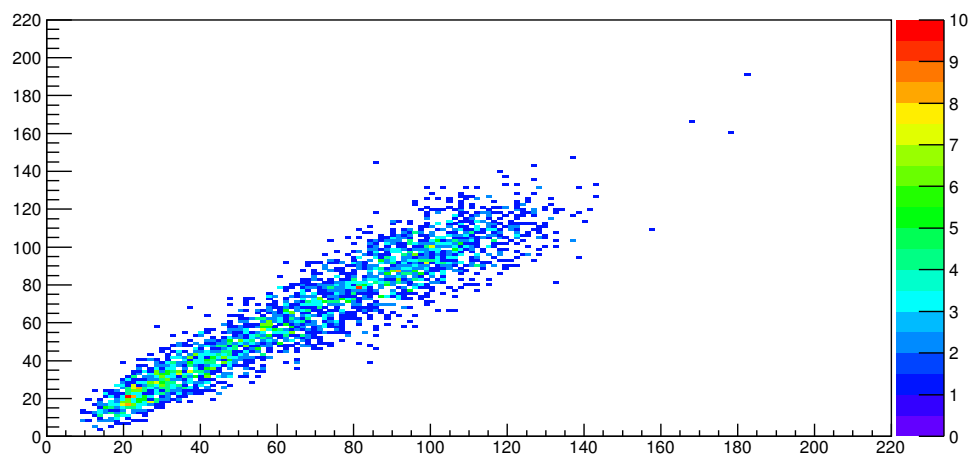


(a) Histogram dla lewego fotopowielacza - C1.

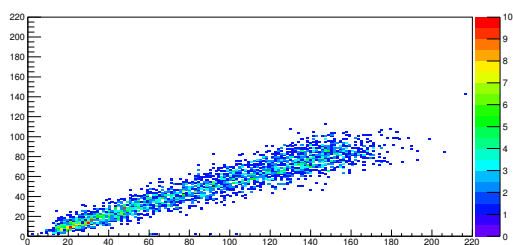


(b) Histogram dla prawy fotopowielacza - C1.

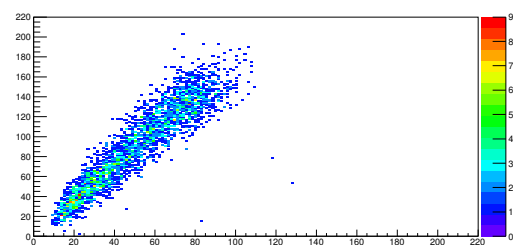
Rys. 5: Histogramy zmierzonych ładunków w zależności od położenia źródła.



(a) Pozycja naświetlania 13.8cm



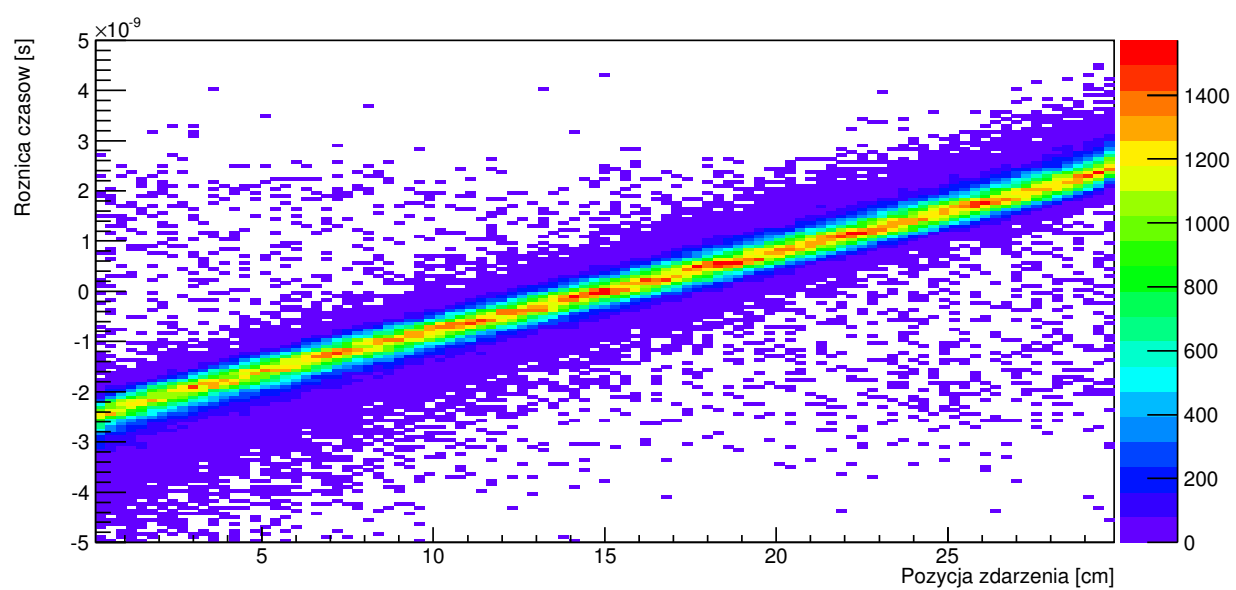
(b) Pozycja naświetlania 3.3cm



(c) Pozycja naświetlania 26.7cm

Rys. 6: Histogramy  $p(Q_L|Q_P)$  dla różnych pozycji źródła kwantów gammów.





Rys. 7: Histogram różnicy czasów przekroczenia progów  $0.04V$  w zależności od miejsca naświetlania.

## 4 Rozkłady ekstremalne

Ten rozdział skupia się na obliczeniu rozkładów ekstremalnych  $p(\overline{t_{0P}}|Q_P, x)$  - czasów zarejestrowania pierwszego fotonu scyntylacyjnego przez wybrany fotopowielacz. Dodatkowo zaprezentowane są wyniki dla czasów rejestracji ostatniego z fotonów.

Skonstruowany jest prosty model wyświecania fotonów z miejsca zdarzenia oraz ich rozchodzenia się w scyntylatorze. Dodatkowo można obliczyć, jak liczba fotonów, które docierają do fotopowielacza wpływa na dokładność odtwarzania pozycji metodą TOF na podstawie różnic czasu pomiędzy początkiem lub końcem sygnału.

### 4.1 Model

Założenia:

- Założono profil wyświecania na podstawie [8],
- Fotony wyświecane z miejsca zdarzenia są wyświecane izotropowo,
- Idealna refleksja do kąta granicznego,
- Idealna refrakcja powyżej kąta granicznego,
- Odbicia - powyżej pierwszego nie wpływają na rozchodzenie - nie trzeba rozważać żadnych zderzeń z ściankami - zapewnia to symetrię cylindryczną problemu.
- Dla rozchodzenia światła w scyntylatorze uwzględnione jest tylko eksponencjalne pochłanianie przez materiał scyntylatora.
- Wydajność fotokatody nie jest potrzebna - wykresy są tworzone pod warunkiem znanej ilości elektronów wyemitowanych z fotokatody. Wartość ta jest obliczana z pomiarów przez przedzielenia zebranego ładunku przez średni ładunek dla sygnału od pojedynczego fotoelektronu. Metoda pomiaru sygnałów dla pojedynczych fotoelektronów została opisana w [15].

Prawdopodobieństwo dotarcia fotonu emitowanego w odległości  $d$  od fotokatody jest zależne od jego drogi(geometrycznej):

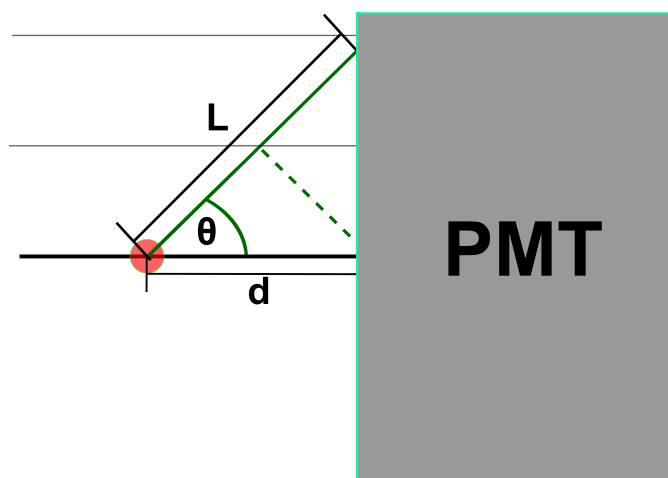
$$p(l) = \text{Exp}\left(-\frac{l}{X_0}\right), \quad (14)$$

gdzie  $X_0$  jest długością radiacyjną. Dla zdarzenia w czasie  $t = 0$  założony profil wyświecania fotonów przez materiał scyntylatora jest postaci:

$$PW(T) = \int_0^{\infty} \lambda \text{Exp}(-\lambda\tau) PG(T - \tau) d\tau \quad (15)$$

$$PG(t) = \Theta(T) \cdot \Theta(5\sigma - T) \cdot G(2.5\sigma, \sigma, T), \quad (16)$$

gdzie  $G(2.5\sigma, \sigma, T)$  jest rozkładem normalnym o średniej w punkcie  $2.5\sigma$ , o szerokości  $\sigma$ , wartość obliczona we współrzędnej  $T$ . Reszta wzoru - funkcje Heaviside'a służą symetrycznemu przycięciu rozkładu normalnego do szerokości  $2.5\sigma$ , tak aby nośnik zaczynał się w zerze i kończył w  $5\sigma$ .



Rys. 8: Schemat geometrii rozchodzenia się światła w scyntylatorze. Czerwonym kołem zaznaczono miejsce zdarzenia.  $\theta$  oznacza kąt pomiędzy trajekcją fotonu  $L$  i prostą łączącą miejsce zdarzenia z fotokatodą (zakres kąta od 0 do  $\frac{\pi}{2}$  biegundy w kierunku prostej  $d$ ). Wielkość  $d$  oznacza odległość od miejsca zdarzenia do fotokatody wzdłuż opisanej prostej.  $l$  oznacza długość drogi przebytej przez foton w materiale scyntylatora. Przerywana linia pokazuje odbicie od ścianki.

Na rys. 8 pokazano geometrię, z której wynika zamiana zmiennych ze sferycznych na cylindrycznie symetryczne określone przez długość drogi geometrycznej w scyntylatorze. Droga w scyntylatorze jest powiązana z czasem upływającym od zdarzenia przez:

$$l = T \frac{c}{n} \quad (17)$$

Zmiana zmiennych z kąta na długość drogi odbywa się przez:

$$\cos(\theta) = \frac{d}{l} \quad (18)$$

Wykonano zamianę sferycznie symetrycznego rozkładu wyświecania fotonów na rozkład fotonów potencjalnie dolatujących w jednostce czasu (drogi). Dla jednej półkuli od bieguna do równika rozkład ten jest postaci:

$$d \cos(\theta) = \sin(\theta)d\theta = \frac{d}{l^2}dl. \quad (19)$$

Rozkład jest określony dla  $l \geq d$ . Dla  $l < d$  niemożliwe fizycznie jest aby do fotokatody doleciały jakiegokolwiek fotony, więc wartość rozkładu wynosi 0.

Następnym krokiem jest uwzględnienie absorpcji - funkcje są nieznormalizowane (normalizacja będzie mniejsza od jedności po uwzględnieniu absorpcji). Zadanie normalizacji przez liczbę fotonów, które zostały zarejestrowane odtworzy gęstość liczby fotonów na jednostkę czasu.

Rozkład gęstości prawdopodobieństwa dolecenia fotonów uwzględniający absorpcję ma postać:

$$h(l) = \frac{d}{l^2} \text{Exp}\left(-\frac{l}{X_0}\right), \quad (20)$$

i jest określony dla  $l > d$ . Zapisując ten sam rozkład, jako rozkład prawdopodobieństwa zależny od czasu i uwzględniając wpływ profilu wyświecania otrzymujemy funkcję rozkładu prawdopodobieństwa:

$$i_0(T) = |J| \frac{d}{(Tc/n)^2} \text{Exp}\left(-\frac{Tc/n}{X_0}\right) * PW(T), \quad (21)$$

gdzie \* oznacza splot, a  $|J| = c/n$ . Dodając warunek na  $l > d$  oraz na brak fotonów ponad kątem granicznym (prawdziwy poza małymi odległościami od fotokatody, gdzie nie zachodzi nawet pojedyncze odbicie powyżej kąta granicznego) otrzymano:

$$i(T) = \left( \Theta(T - dn/c) \Theta\left(\frac{d}{\cos(\theta_{gr})} \frac{n}{c} - T\right) \frac{dn}{T^2 c} \text{Exp}\left(-\frac{Tc/n}{X_0}\right) \right) * PW(T) \quad (22)$$

Będzie to funkcja użyta dalej do generowania rozkładów ekstremalnych.

## 4.2 Rozkłady ekstremalne

Szukane są rozkłady czasów, w których rejestrowany jest sygnał pierwszego (ostatniego) fotoelektronu. W tej sekcji rozkład prawdopodobieństwa oznaczę jako  $p(x)$ , a jego dystrybuantę  $P(x)$ . Znaczenie dystrybuanty to prawdopodobieństwo zdarzenia  $x \leq y : P(y)$  analogicznie  $x \geq y : 1 - P(y)$ . Nowa dystrybuanta opisująca  $N$  losowań, w których największe z nich ma wartość  $x$  jest postaci:

$$F_+(x) = P(x)^N \quad (23)$$

Analogicznie dla wielkości najmniejszej:

$$F_-(x) = (1 - P(x))^N \quad (24)$$

Rozkłady prawdopodobieństwa to odpowiednio:

$$f_+(x) = NP(x)^{N-1}p(x) \quad (25)$$

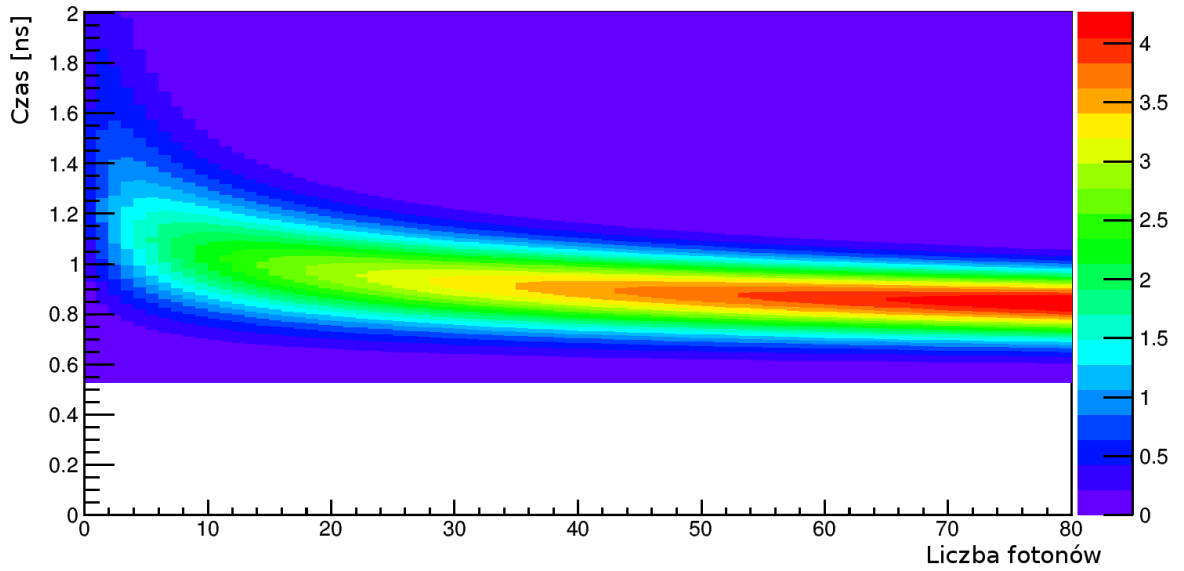
$$f_-(x) = N(1 - P(x))^{N-1}p(x) \quad (26)$$

Podstawiając rozkład  $i(t)$  za  $p(t)$  ekstremalne rozkłady prawdopodobieństwa przyjmują postać:

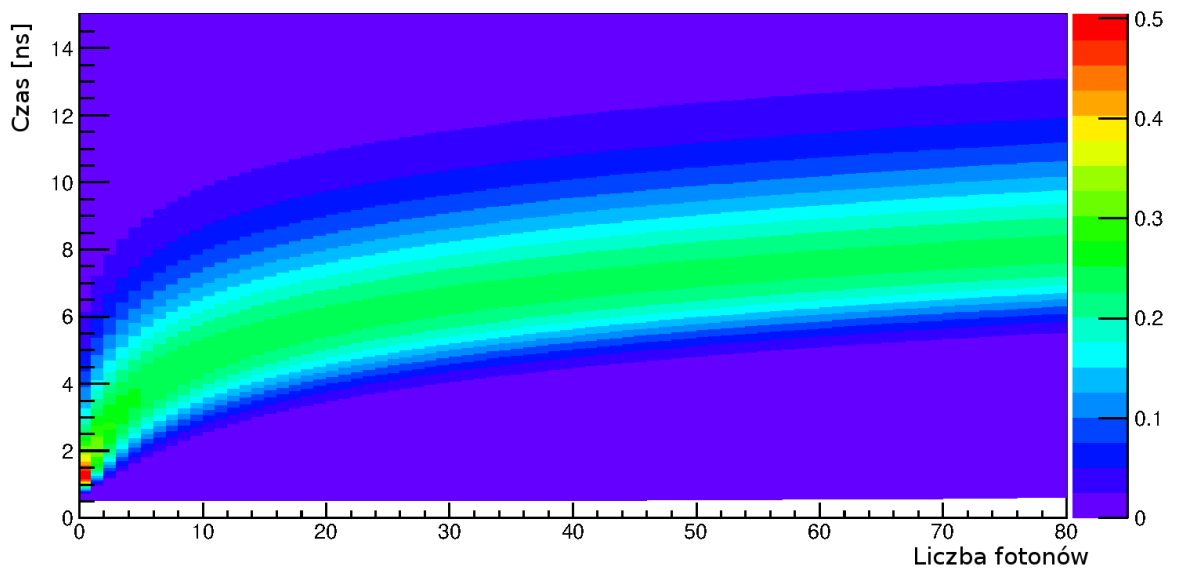
$$i_{min}(t, d, N) = N(1 - I(t, d))^{N-1}i(t, d) \quad (27)$$

$$i_{max}(t, d, N) = NI(t, d)^{N-1}i(t, d) \quad (28)$$

gdzie  $N$  jest liczbą fotonów, które zostały zarejestrowane przez fotopowielacz. Ustawiono poziom napięcia dla dyskryminatorów progowych, tak aby najniższy z progów był mniejszej wysokości niż średnia amplituda sygnału pojedynczego fotoelektronu. Pierwszy otrzymany na zboczu narastającym sygnał oznacza w przybliżeniu czas pojawienia się sygnału od pierwszego fotonu i analogicznie na zboczu opadającym koniec sygnału ostatniego fotonu. Pozwala to na określenie minimalnej niepewności wyznaczania czasu (pozycji) metodą TOF. Rozkłady dla zbocza opadającego nie były używane w rekonstrukcji, na rysunkach pokazany jest tylko jeden z nich dla pozycji  $d = 10 \text{ cm}$  od fotokatody. Rozkłady zostały obliczone numerycznie i są zaprezentowane na rys. 9. Zmiana odchylenia standardowego rozkładów pierwszych rejestrowanych fotonów w zależności liczby zarejestrowanych fotonów została pokazana na rys. 10.

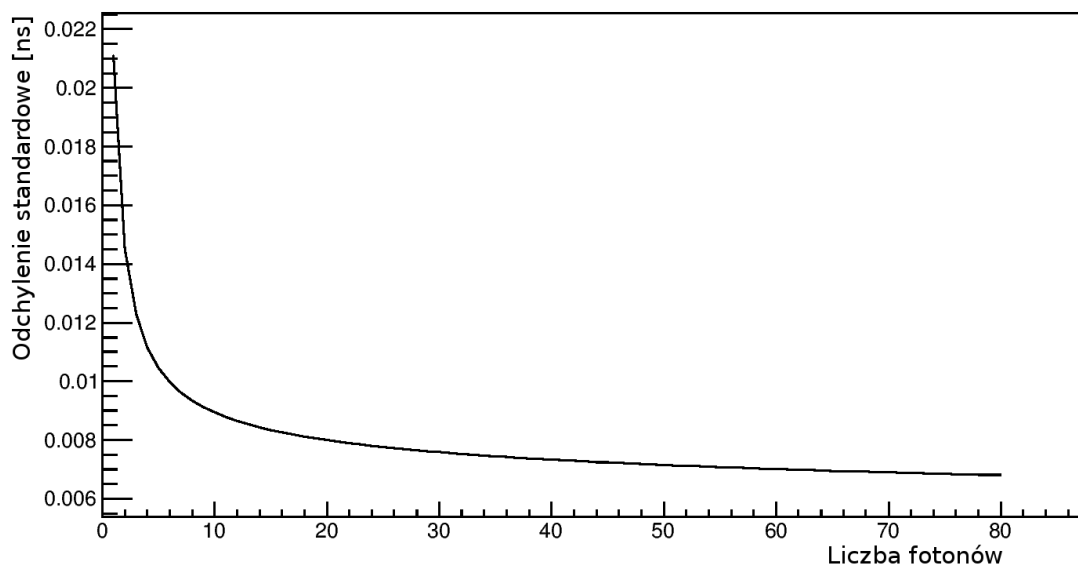


(a) Histogram rozkładów ekstremalnych dla początku sygnału dla  $d = 10 \text{ cm}$ .

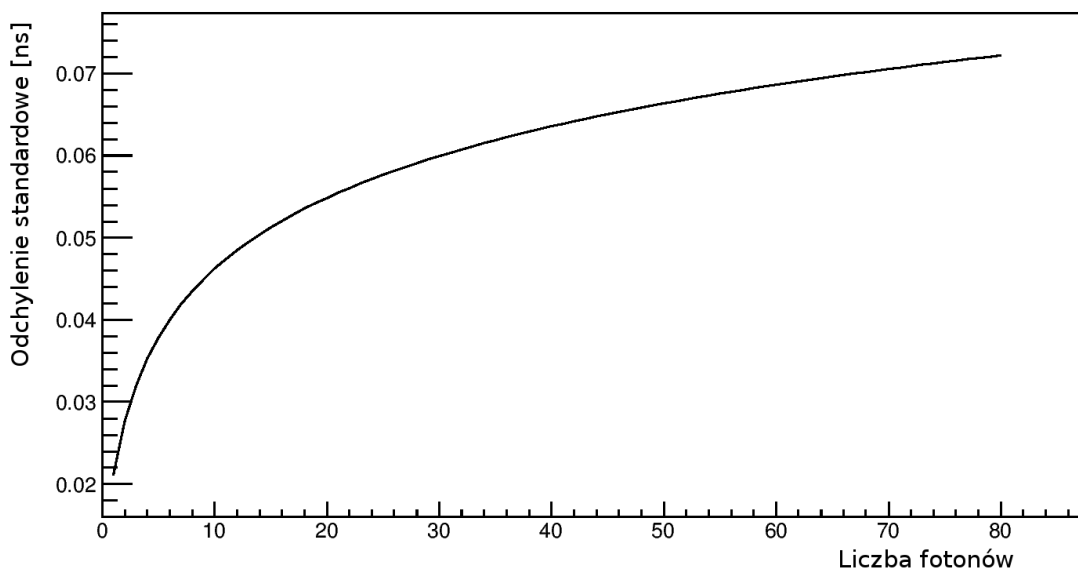


(b) Histogram rozkładów ekstremalnych dla końca sygnału dla  $d = 10 \text{ cm}$ .

Rys. 9: Rozkłady ekstremalne.



(a) Początek sygnału dla  $d = 10$  cm.



(b) Koniec sygnału dla  $d = 10$  cm.

Rys. 10: Zmiana odchylenia standardowego dla zmiennych z rozkładów ekstremalnych w zależności od liczby fotonów w sygnale.

### 4.3 Dopasowanie parametrów rozkładów ekstremalnych

W poprzedniej sekcji korzystano z parametrów scyntylatora podanych przez producenta. Należało pokazać o ile, w porównaniu do takich teoretycznych rozkładów, rozmyte są czasy  $t_0$ . W tym celu analizie poddano różnice pomiędzy czasami reakcji najniższych progów na obu fotopowielaczach. Założono, że wszystkie nie opisane w poprzednim podrozdziale efekty można uwzględnić przez rozmycie rozkładów przez rozkład normalny  $G2$ . Wkład do rozmycia mogą mieć między innymi różne czasy narastania sygnałów od pojedynczych fotoelektronów, rozmycie wprowadzane przez fotopowielacze i elektronikę oraz inne niekoniecznie znane niepewności statystyczne. Nowa postać funkcji rozkładu prawdopodobieństwa opisującej rozkład ekstremalny jest postaci:

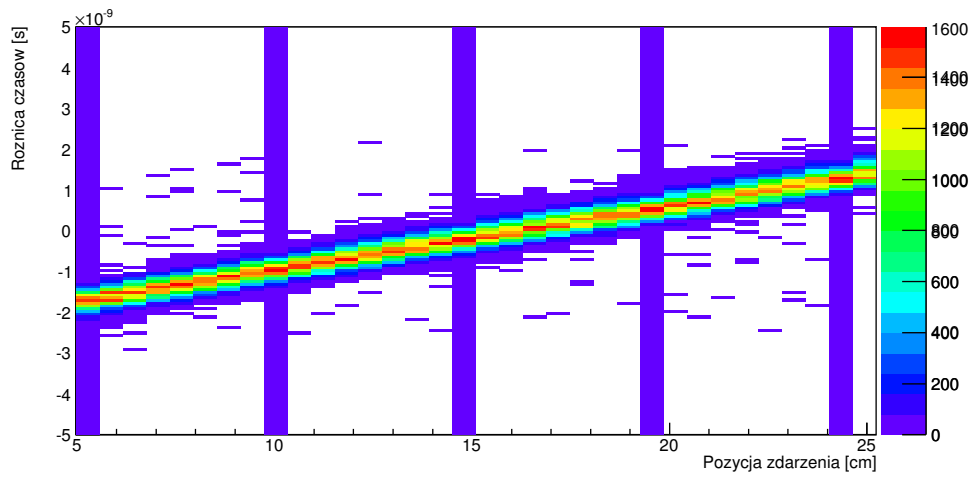
$$f(T) = [Z*PG*D*R](T) = [Z*G1*D*G2](T) = [Z*D*G3](T) == [Z*PG'*D](T), \quad (29)$$

gdzie  $Z * PG$  stanowi funkcje wyświecania - opisaną w równaniu (22),  $D$  funkcje podróży - absorpcji fotonów,  $R$  - funkcje rozmycia. Zakładając, że  $PG$  oraz  $R$  są w przybliżeniu rozkładami normalnymi oraz wiedząc, że splot dwóch rozkładów normalnych to rozkład normalny można zapisać trzecią równość oraz znowu korzystając z przybliżenia  $PG$  przez  $G$  można zapisać ostatnią równość. Widać, że dopasowaniu ulegać będzie tylko jeden parametr - szerokość rozkładu w funkcji  $PG'$ . Wykonano dopasowanie symulacji w zależności od tego parametru do danych doświadczalnych dla różnicy czasów pomiędzy najniższymi progami. Symulacja korzystała ze zmierzonych rozkładów ładunków, aby uwzględnić zmianę rozkładu prawdopodobieństwa dolecenia pierwszego fotonu w zależności od liczby losowań - liczby fotonów(ładunku). Na podstawie sygnałów pojedynczych fotoelektronów wyznaczono przelicznik ładunku na liczbę elektronów. Ładunek jest liniowo zależny od energii, więc skaluje się liniowo z energią na obu końcach - wyliczono stałą przeliczającą ładunek na jednej stronie na ładunek na drugiej stronie, na podstawie ilorazu średniego ładunku (zależnego od  $x$ ) na jednym i drugim końcu. Wkład dla danej pozycji był obliczany na podstawie jednego z histogramów ładunku  $Q_L(x)$  - dla każdego przedziału histogramu przeliczono liczbę fotonów na lewym i prawym końcu. Potem obliczono rozkład zmiennej losowej różnicy czasów  $p(\Delta t = t_{0L} - t_{0P} | Q_L, Q_P, x) = \int f(t_L | Q_L, x) \cdot f(t_L - \Delta t | Q_P, L - x) dt_L$ . Wszystkie wkłady od różnych ładunków dodano otrzymują rozkład zależny już wyłącznie od pozycji. Otrzymano dwuwymiarowy histogram  $H(\Delta t, x)$ . Histogram ten był porównywany z histogramem wygenerowanym z danych. Porównanie to zostało zaprezentowane na rys. 11.

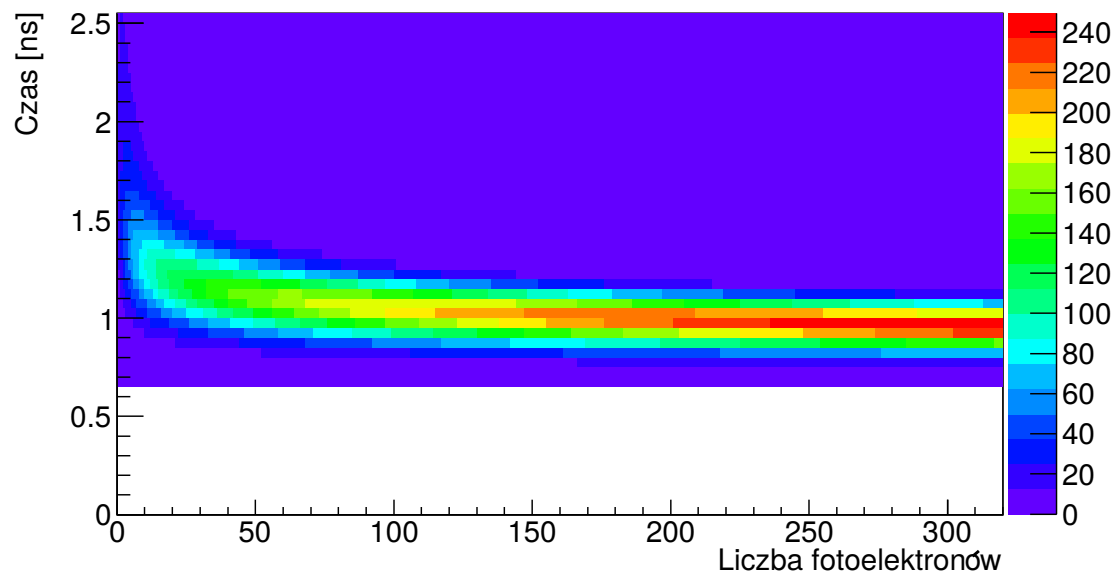
Rozkład ekstremalny z dopasowanymi parametrami został zaprezentowany na rys. 12. Ma on zmniejszona liczbę przedziałów w czasie do tej używanej dalej w dekonwolucji. Dla przykładu dla położenia  $d = 10.2 \text{ cm}$  wyrysowano przekroje tego rozkładu dla różnej liczby fotonów: rys. 13. Na rys. 14 wyrysowano przekroje dla



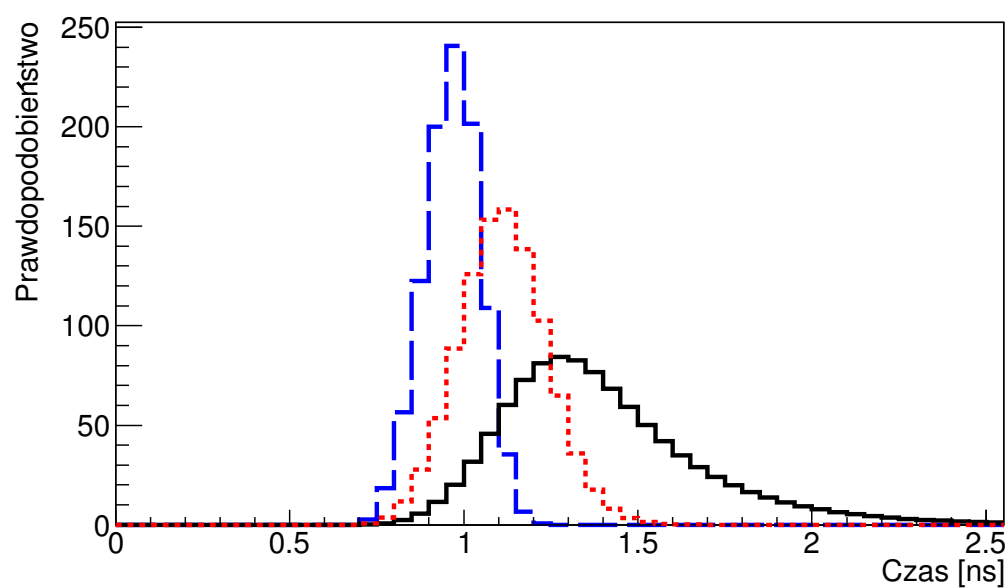
zadanego ładunku w różnych odległościach  $d$  od fotopowielacza.



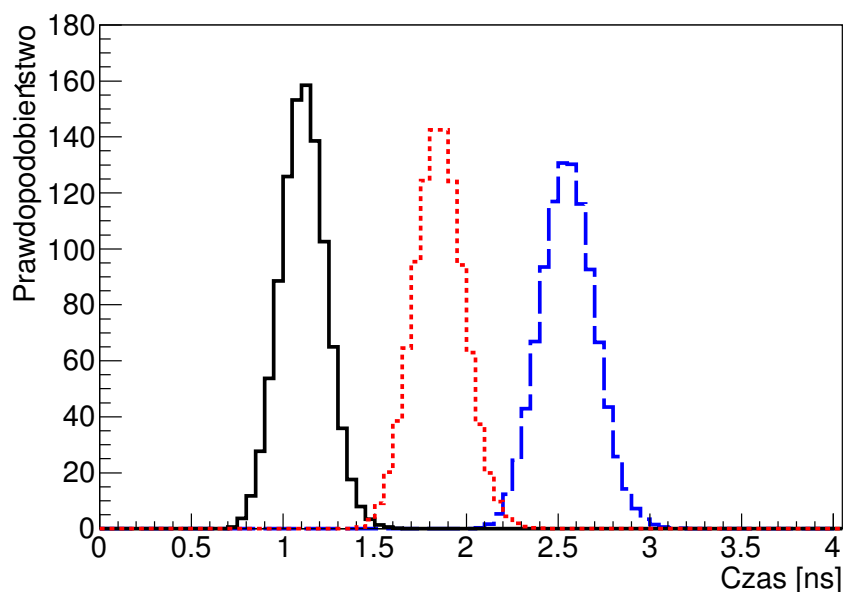
Rys. 11: Rozkład różnicy czasów na najniższym z progów. Na część przedziałów dla pozycji naniesiono rozkłady obliczone na podstawie dopasowanych rozkładów ekstremalnych. Są to te przedziały dla których wszystkie przedziały czasowe są wypełnione.



Rys. 12: Użyty do tworzenie bazy danych rozkład ekstremalny dla początku sygnału - dla pozycji 10.2cm.



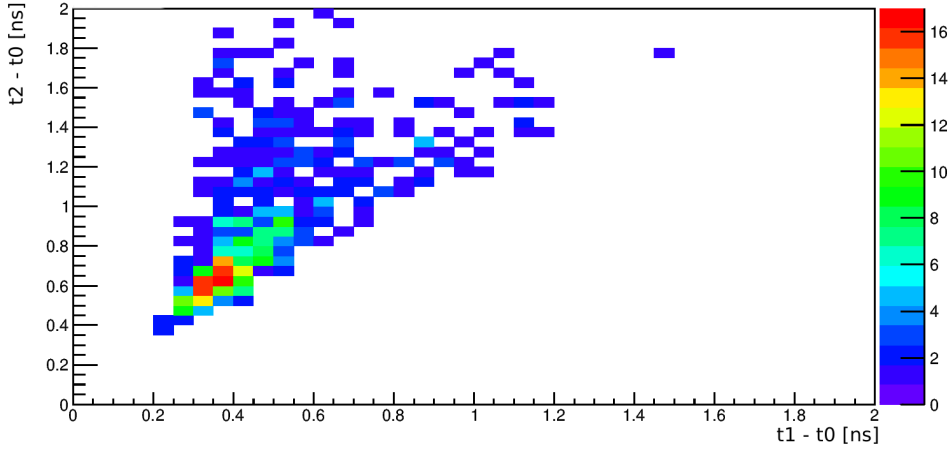
Rys. 13: Przekroje rozkładu ekstremalnego dla początku sygnału dla pozycji 10.2cm dla 10 fotoelektronów - czarna, ciągła linia; dla 50 fotoelektronów - czerwona gęsto przerywana linia; dla 250 fotoelektronów - niebieska rzadko przerywana linia. Wszystkie rozkłady są znormalizowane.



Rys. 14: Przekroje rozkładów ekstremalnych dla początku sygnału dla liczby fotoelektronów równej 50. Dla pozycji 10.2 cm - czarna, ciągła linia; dla pozycji 20.1 cm - czerwona gęsto przerywana linia; dla pozycji 29.7 cm - niebieska rzadko przerywana linia. Wszystkie rozkłady są znormalizowane.

## 5 Korelacje

Histogramy  $p(t_i - t_0, t_j - t_0 | Q, x)$  nie niosą w sobie informacji o czasie zdarzenia. Ponadto nie dostarczają informacji o korelacji czasów  $t_i$  i  $t_j$ , jako że są obciążone dodatkową zależnością wprowadzoną przez odjęcie  $t_0$ . Przykładowy taki histogram został umieszczony na rys. 15. Odtworzenie wykresów  $p(\bar{t}_i, \bar{t}_j | Q, x)$  (równoważne  $p(t_i, t_j | Q, t, x)$ ) wymaga usunięcia zależności współrzędnych dla obu osi od  $t_0$ . Poprzednia sekcja opisywała obliczenie  $p(\bar{t}_0 | Q, x)$ . Wprowadzona przez  $t_0$  zależność pomiędzy zmiennymi w  $p(t_i - t_0, t_j - t_0 | Q, x)$  jest postaci:



Rys. 15: Histogram  $p(t_1 - t_0, t_2 - t_0 | Q, x)$  dla pozycji 16.8cm dla ładunków z zakresu  $25pC$  do  $30pC$ .

$$p(t_i - t_0, t_j - t_0 | Q, x) = \int p(\bar{t}_i - \tau, \bar{t}_j - \tau | Q, x) \cdot p(\bar{\tau} | Q, x) d\tau \quad (30)$$

Jest to sytuacja analogiczna do splotu. Statystyka zliczeniowa wynikająca z napełniania histogramu, wymaga użycia metody dekonwolucji przystosowanej do pracy z takimi rozkładami. Algorytm dekonwolucji Richardonsa - Lucy [18, 19] jest iteracyjną procedurą opracowaną celem odzyskiwania ostrych obrazów z danych astronomicznych, gdy znana jest funkcja rozmycia aparatury. Metoda jest stosowalna do dowolnie wymiarowych danych i dowolnych funkcji rozmycia, chociaż nie określa warunków, w których jest zbieżna. Jeśli zbieżność jest osiągnięta, wynikiem jest rozwiązanie o największej wiarygodności dla odzyskiwanego obrazu. Zapisując obserwowane pomiary, jako funkcję nierozmytych pomiarów:

$$d_i = \sum_j p_{ij} u_j, \quad (31)$$

gdzie  $d_i$  jest wartością obserwowaną,  $u_j$  to poszukiwane nierozmyte wielkości, a  $p_{ij}$  jest funkcji rozmycia pomiędzy dwoma punktami.  $d_i$  to stworzone histogramy  $p(t_i - t_0, t_j - t_0 | Q, x)$ ,  $u_j$  to szukane  $p(\bar{t}_i, \bar{t}_j | Q, x)$ , a  $p_{ij}$  to odpowiednio przekształcone  $p(\bar{t}_0 | Q, x)$ .

Iteracyjny  $t + 1$ -szy krok procedury jest postaci:

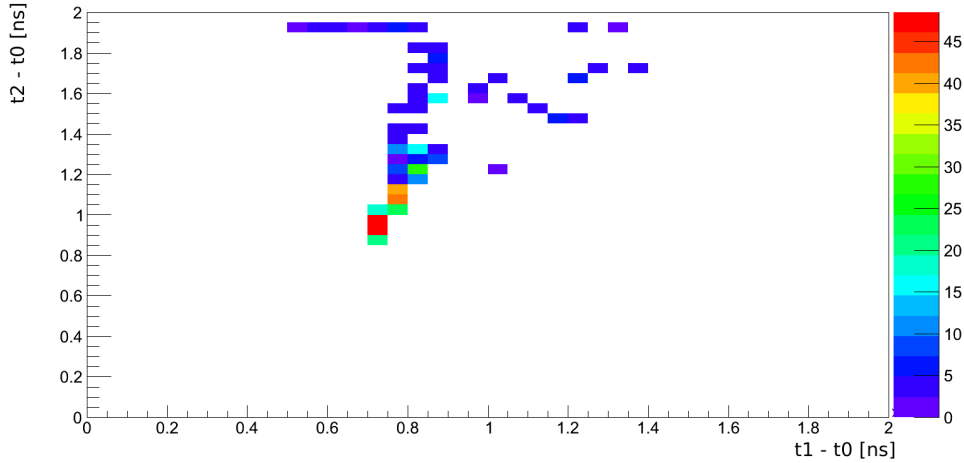
$$u_j^{(t+1)} = u_j^{(t)} \sum_i \frac{d_i}{c_i} p_{ij}, \quad (32)$$

gdzie:

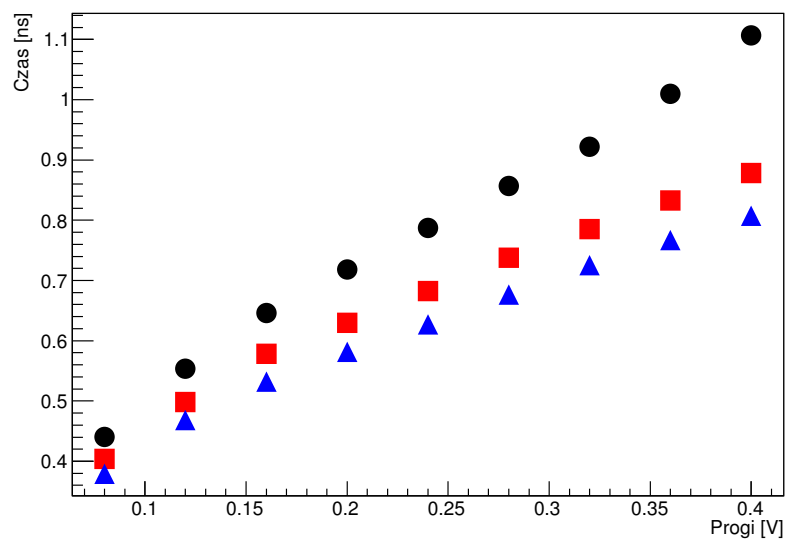
$$c_i = \sum_j p_{ij} u_j^{(t)} \quad (33)$$

W pierwszym kroku iteracji za wynik założono jednolite wypełnienie histogramów - po jednym zdarzeniu w każdym przedziale. Procedurę kończono po 80-ciu krokach iteracji i sprawdzano czy osiągnięta została zbieżność. Ilorazy  $u_j^{(80)} / u_j^{(79)}$  powinny przyjmować wartość 1 z dokładnością do dwóch miejsc znaczących.

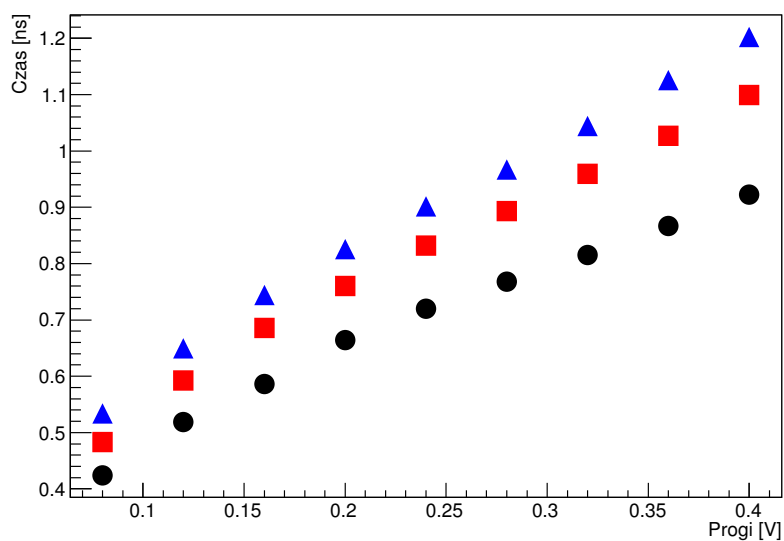
Wynik zastosowania powyższej procedury, dla przykładu dla histogramu ??, umieszczony fig na rys. 16. Na podstawie otrzymanych wykresów można wyliczyć średnie wartości  $\bar{t}_i$  - czyli  $\mu_i(t, Q, x) = \langle \bar{t}_i(Q, x) \rangle + t$  oraz macierze kowariancji - jako, że wszystkie średnie zmieniają się liniowo z  $t$ :  $\Sigma(t, Q, x) = \Sigma(Q, x)$ . Przykładowe zmiany średnich  $\bar{t}_i$  w zależności od ładunku  $Q$  dla ustalonej pozycji są umieszczone na rys. 17. Analogicznie zmiana  $\langle \bar{t}_i \rangle$  dla ustalonego ładunki, dla kilku różnych pozycji jest umieszczona na rys. 18. Przykładowa macierz kowariancji dla zrekonstruowanego rozkładu jest umieszczona na rys. 19.



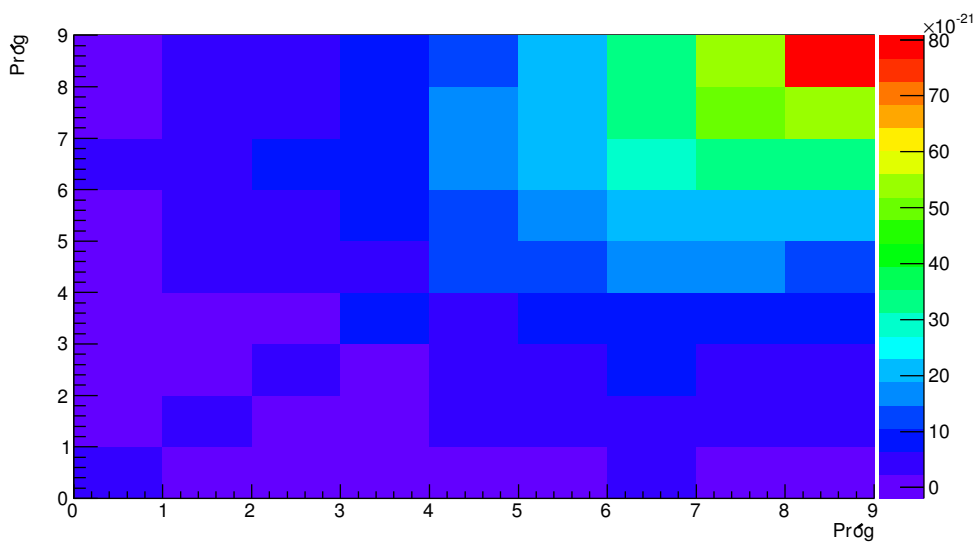
Rys. 16: Wynik dekonwolucji dla histogramu  $p(t_1 - t_0, t_2 - t_0 | Q, x)$  dla pozycji 16.8cm dla ładunków z zakresu  $25pC$  do  $30pc$ . Lewy fotopowielacz.



Rys. 17: Średnie wartości czasów po dekonwolucji dla różnych wysokości progów. Wszystkie wartości odnoszą się do pozycji 1.8cm. Czarne kropki oznaczają średnie czasy pod warunkiem zebrania ładunku pomiędzy 45 i 50pC; czerwone kwadraty dla ładunku od 70 do 75pC; niebieskie trójkąty dla ładunków od 95 do 100pC. Lewy fotopowielacz.



Rys. 18: Średnie wartości czasów po dekonwolucji dla różnych wysokości progów. Wszystkie wartości odnoszą się do ładunków z przedziału od  $70pC$  do  $75pC$ . Czarne kropki oznaczają średnie czasy dla pozycji źródła  $3.3cm$ ; czerwone kwadraty dla pozycji  $15.3cm$ ; niebieskie trójkąty dla pozycji  $27.3cm$ . Lewy fotopowielacz.



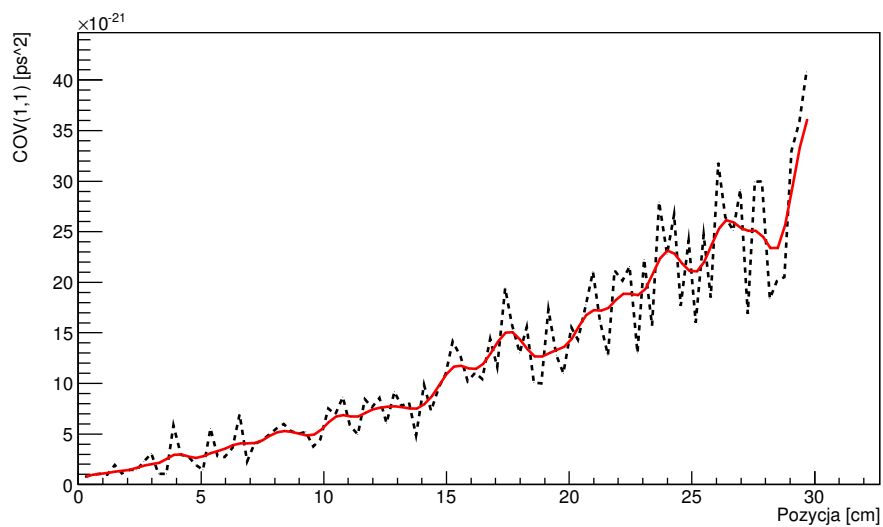
Rys. 19: Macierz kowariancji dla pozycji  $15.3cm$  i zebranego ładunku z przedziału od  $45pC$  do  $50pC$ .

## 5.1 Uśrednienie Macierzy Kowariancji

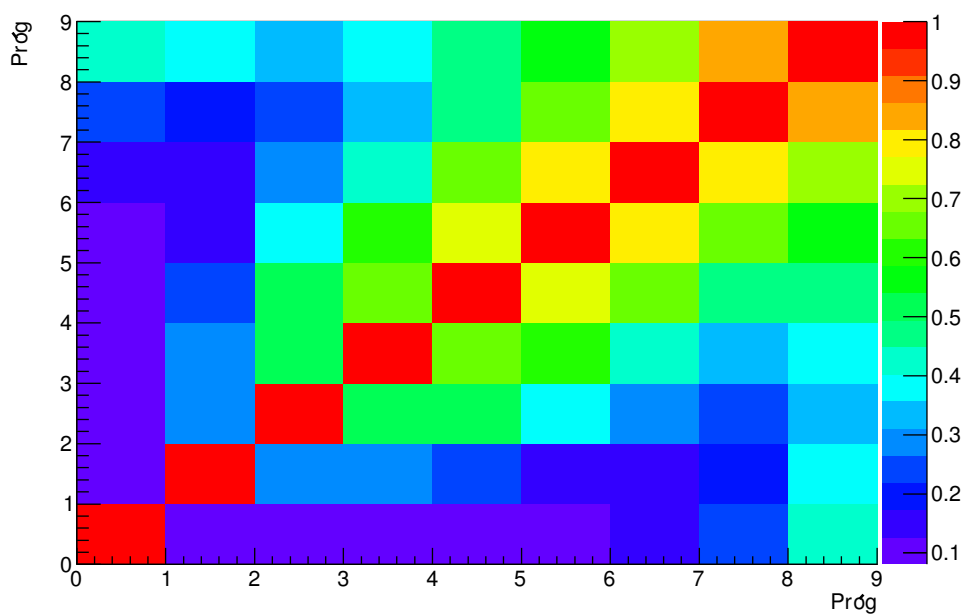
Niestety rekonstrukcja z tak obliczonymi macierzami kowariancji nie jest efektywna. Granulacja i wypełnienie histogramów, użytych w dekonwolucji wpływa na dokładność obliczenia poszczególnych macierzy kowariancji. W zależności od położenia średniej, w zależności od tego czy jest ona blisko krawędzi lub środka przedziałów histogramu obliczona szerokość jest obciążona różnej wielkości błędami systematycznymi. Dlatego dla każdej pozycji macierze kowariancji zostały uśrednione po ładunku, z wagami zależnymi od liczby zdarzeń wypełniającymi histogramy o różnych ładunkach. Wartości poszczególnych elementów macierzy kowariancji, zmieniały się niemonotonicznie z położeniem. Oczekiwany wynik byłby na przykład wzrostem odchylenia standardowego czasów mierzonych na  $i$  tym progu wraz z odległością od fotopowielacza. Aby poprawić tę sytuację każda z pozycji w uśrednionej po ładunkach macierzy kowariancji była dodatkowo uśredniana z wartościami znajdującymi się w odpowiadających elementach sąsiednich w położeniach macierzy. Jako funkcję wagi dla średniej arytmetycznej użyto rozkład normalny o odchyleniu standardowym równym  $45 \text{ mm}$ . Przykładowe uśrednienie wartości odchylenia standardowego dla progu  $\sigma[t_2](x)$  zostało pokazane na rys. 20. Skonstruowaną tak macierz przeliczoną na macierz korelacji umieszczono na Rys. 21.

Uzyskane przez takie uśrednienie macierze kowariancji były przeliczane na macierze korelacji, które później przeliczano dla poszczególnych ładunków przemnażając jej elementy przez odpowiednie uśrednione wartości odchylenia standardowego zależne od położenia i ładunku - tak aby odzyskać zmniejszenie się szerokości wielowymiarowych rozkładów normalnych, wraz z wzrostem liczby elektronów zebranych na fotopowielaczu. Obliczone w ten sposób macierze kowariancji były używane w konstrukcji funkcji  $f_L$  oraz  $f_P$ .





Rys. 20: Uśrednianie macierzy kowariancji dla lewego fotopowielacza po pozycjach - przykład dla wartości na pozycji 2,2 w macierzy (odchylenie standardowe dla czasu  $t_2$ ).



Rys. 21: Uśredniona i wygładzona macierz korelacji dla pozycji 15.3cm dla lewego fotopowielacza.

## 6 Wyniki

Rozdział ten opisuje wyniki uzyskane dla rekonstrukcji położenia i czasów dla części serii pomiarowych, które nie były używane w żadnej z poprzednich sekcji. Rekonstrukcja była przeprowadzona dla 73% pomiarów. Pomiarzy odrzucone, to pomiarzy o średniej geometrycznej zebranych ładunków mniejszej niż  $40pC$ . Średnia geometryczna ładunków, zakładając idealną reflektancję i absorpcję, jest proporcjonalna do zdeponowanej energii:

### 6.1 Rekonstruowane zdarzenia

$$\int_L E \cdot eff \cdot \exp(L/X_0) = \langle Q_L \rangle \quad (34)$$

gdzie  $eff$  to średnia liczba fotonów emitowanych przez materiał scyntylacyjny na jednostkę energii. Podstawiając  $d/\cos(\theta)$  za  $L$ :

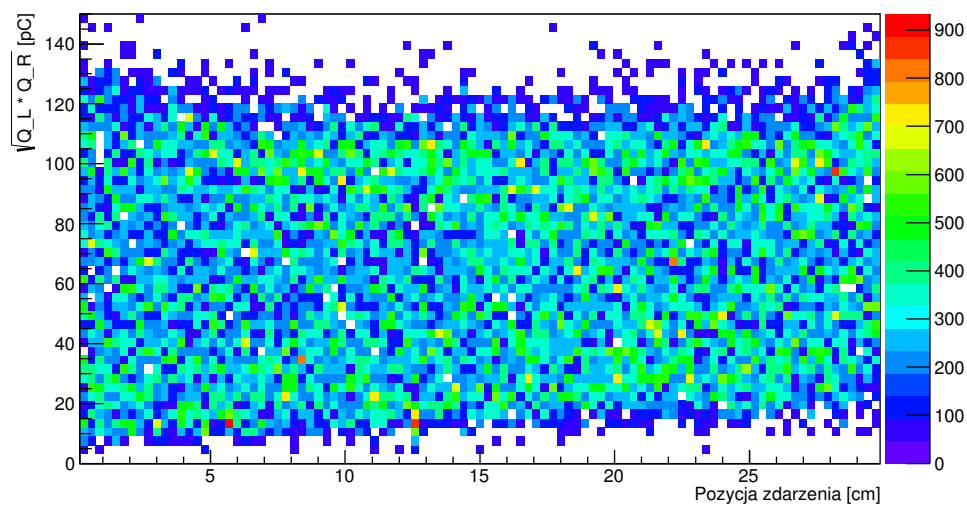
$$\int_{\theta} N \cdot E \cdot eff \cdot \exp\left(\frac{d}{X_0 \cos(\theta)}\right) \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \langle Q_L \rangle \quad (35)$$

gdzie  $N$  to normalizacja. Zakładając, że kąty są bliskie zera - wartość cosinusa jest w przybliżeniu równa jedności i zapisując średnią geometryczną:

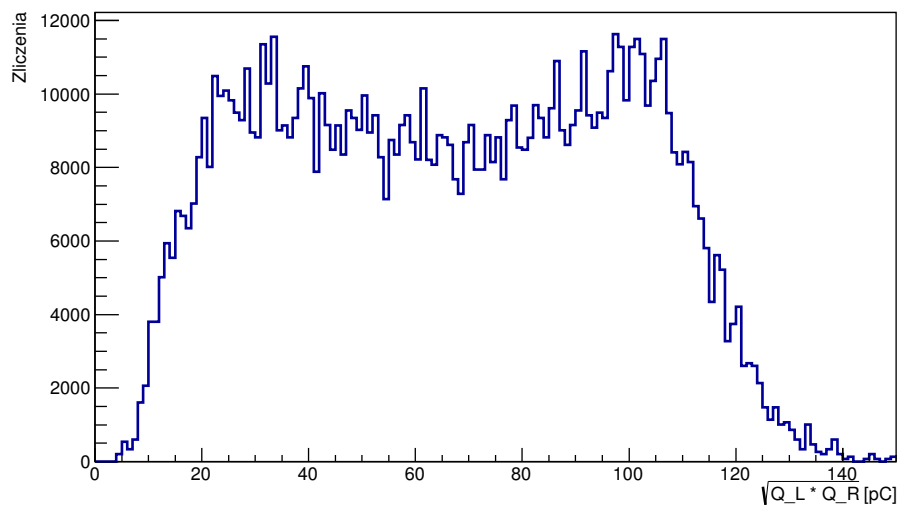
$$\sqrt{\langle Q_L \rangle \langle Q_P \rangle} = N' \cdot E \cdot eff \cdot \sqrt{\exp\left(\frac{x}{X_0}\right) \exp\left(\frac{L-x}{X_0}\right)} \quad (36)$$

$$\sqrt{\langle Q_L \rangle \langle Q_P \rangle} = N' \cdot E \cdot eff \cdot \sqrt{\exp\left(\frac{L}{X_0}\right)} \quad (37)$$

W przybliżeniu średnia geometryczna ładunków jest proporcjonalna do zdeponowanej energii. Cięcie na tak obliczonej wartości jest w przybliżeniu cięciem zdarzeń o niskiej wartości zdeponowanej energii. Takie zdarzenia mogą z większym prawdopodobieństwem pochodzić z kwantów gamma ze źródła, które uległy rozproszeniu przed dotarciem do detektora. Potwierdza to rozkład wartości średniej geometrycznej, który podobny jest do rozmytego rozkładu Comptona. Histogram tych wartości zaprezentowano na rys. 22. Suma rozkładów dla wszystkich pozycji naświetlana została pokazana na rys. 23.



Rys. 22: Rozkład  $\sqrt{Q_L \cdot Q_P}$  w zależności od pozycji źródła.



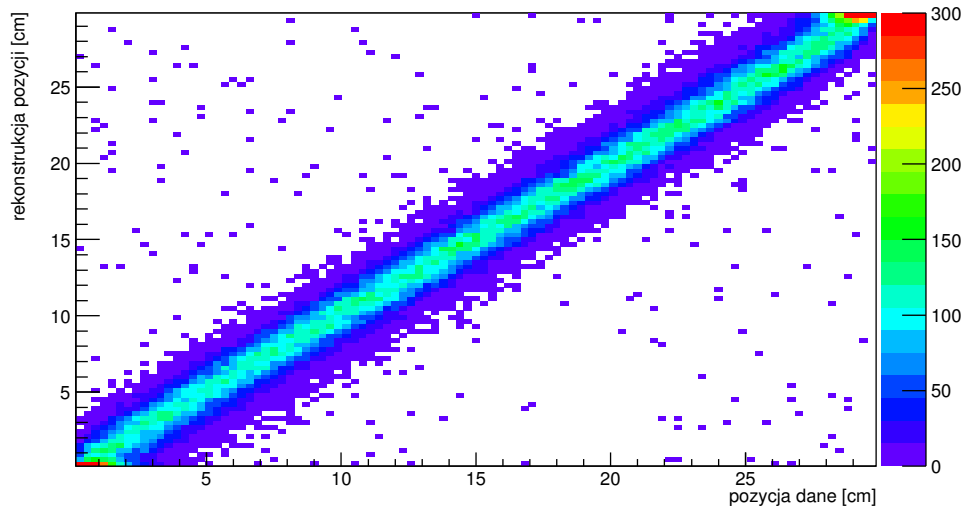
Rys. 23: Suma rozkładów  $\sqrt{Q_L \cdot Q_P}$  po wszystkich pozycjach - do rekonstrukcji były brane tylko pomiary, w których  $\sqrt{Q_L \cdot Q_P} > 40 \text{ pC}$  (73% wszystkich pomiarów).

## 6.2 Wyniki rekonstrukcji

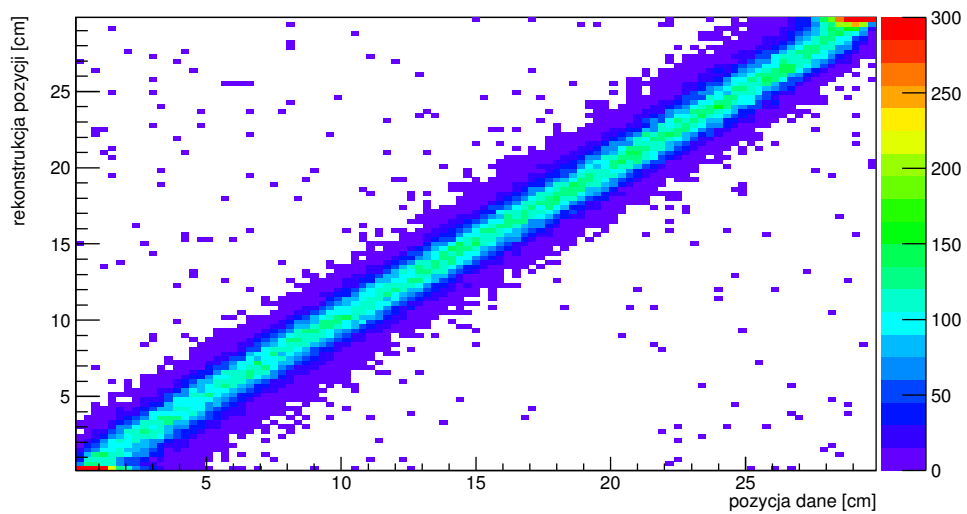
Tabela 1 pokazuje dokładność rekonstrukcji w zależności od liczby progów użytych w rekonstrukcji. Liczba progów oznacza, ile kolejnych progów od najniższego do wyższych zostało wykorzystanych w konstrukcji funkcji  $f_L$  i  $f_P$ . Dla wysokiej liczby progów rekonstrukcja się załamuje. Coraz mniejsza jest liczba zrekonstruowanych zdarzeń, a dla części obliczona wartość funkcji wiarygodności jest wszędzie równa numerycznie 0. Prezentowane są histogramy - porównanie rekonstrukcji położenia ze znanymi z doświadczenia średnimi pozycjami naświetlania detektora paskowego dla kilku różnych liczb wykorzystanych progów: 24, 25, 26. Na histogramach na rys. 27, pokazane są wyniki rekonstrukcji czasu w zależności od położenia. W tabeli 1 zaprezentowano średnie błędy kwadratowe rekonstrukcji w zależności od liczby użytych progów oraz wydajność - procent pomiarów pomyślnie zrekonstruowanych. Dla pomiarów, które nie zostały zrekonstruowane funkcja wiarygodności przyjmowała wszędzie numerycznie wartość zero.

Liczba progów	$\sigma_x$ [krok pomiaru]	$\sigma_x$ [cm]	Procent zrekonstruowany
1 - TOF	4.37	1.31	99.4
2	4.06	1.22	99.4
3	3.92	1.18	99.0
4	3.90	1.17	96.3
5	3.79	1.14	86.0
6	3.55	1.07	66.6
7	3.19	0.96	41.4
8	3.97	1.19	11.8
9	-	-	0.421
10	-	-	0.000922

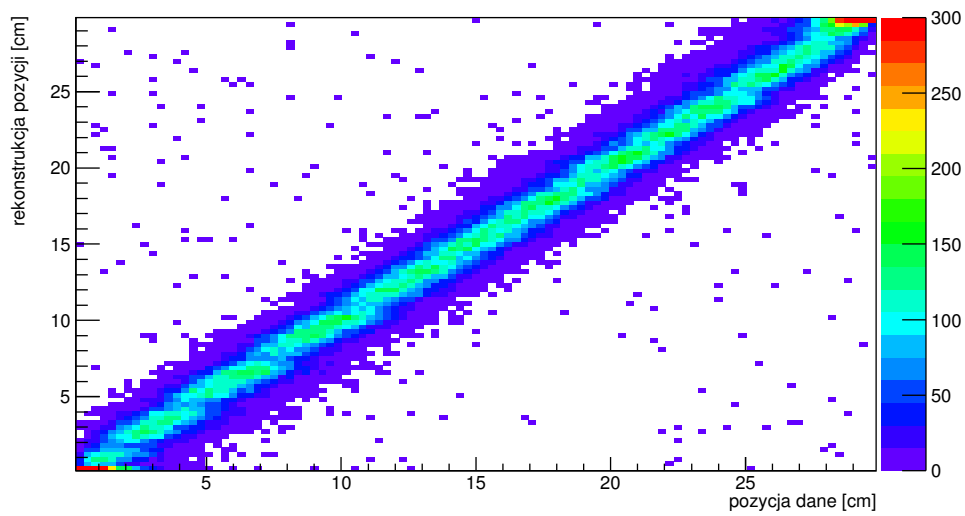
Tablica 1: Wyniki rekonstrukcji



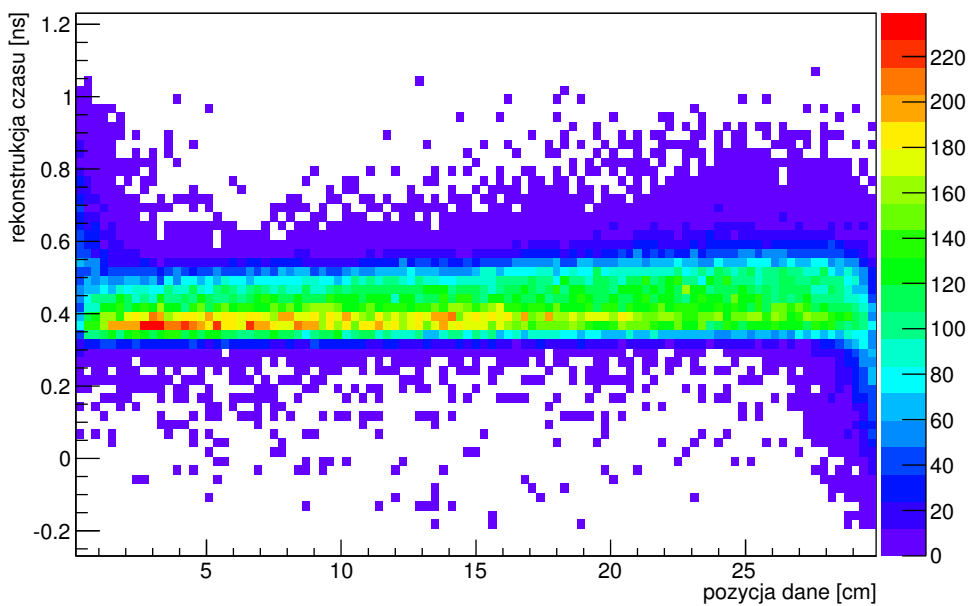
Rys. 24: Wyniki rekonstrukcji położenia z użyciem 2 najniższych progów.



Rys. 25: Wyniki rekonstrukcji położenia z użyciem 3 najniższych progów.



Rys. 26: Wyniki rekonstrukcji położenia z użyciem 4 najniższych progów.



Rys. 27: Wyniki rekonstrukcji czasu z użyciem 3 najniższych progów. Odchylenie standardowe dla rekonstruowanych czasów wynosi 67 ps.

## 7 Podsumowanie

Stworzony algorytm rekonstrukcji daje wyniki o większej dokładności niż zastosowanie rekonstrukcji metodą TOF. Jest to możliwe, dzięki rekonstrukcji dla wielu progów uwzględniającej zmianę kształtu sygnałów, w zależności od odległości od fotopowielacza. Rekonstrukcja bez straty statystyki daje odchylenia standardowe  $1.17\text{ cm}$  w porównaniu do metody różnicy czasów o dokładności  $1.31\text{ cm}$ . Odchylenie standardowe dla rekonstrukcji czasów jest rzędu  $70\text{ ps}$ . Limitacje sprzętowe i wady implementacji algorytmu, sprawiły, że granulacja histogramów użytych do dekonwolucji jest zbyt mała. Uzyskane macierze kowariancji nie zmieniają się monotonicznie wraz z położeniami i ładunkami. Użyte pomiary były wykonane z krokiem  $100\text{ps}$ , który jest dwukrotnie większy niż, przedziały użyte w dekonwolucji - które okazały się być zbyt duże. Dla tej metody zebranie danych z mniejszym krokiem i większą statystyką pozwoliłoby na lepsze obliczenia macierzy kowariancji. Wszystkie omawiane histogramy mogłyby być interpolowane z dobrych pomiarów dla mniejszej liczby pozycji. W tej pracy potrzebne było zastosowanie uśredniania histogramów zebranych w sąsiednich pozycjach.

Procedura korzystająca z rozkładów ekstremalnych daje lepsze wyniki wraz z wzrostem liczby zarejestrowanych fotoelektronów. Im lepsza wydajność fotokatody i liczba fotonów wyświecanych przez scyntylator na jednostkę zdeponowanej energii, tym lepiej będą działać wszystkie opisane procedury. Dla opisanej metody stwierdzono, że uwzględnianie zależności statystycznych pomiędzy progami stałego napięcia o rzędzie wyższym niż liniowy nie jest potrzebne. Sam algorytm może zostać poprawiony przez zastosowanie lepszych metod numerycznych i poprawę wydajności - czasy obliczeń. Większość obliczeń została przeprowadzona w trakcie tworzenia bazy danych - funkcji wiarygodności. Dla rekonstrukcji zdarzenia wystarczy zastosować algorytm szybko znajdujący jej maksimum. Dodatkowo wszystkie potrzebne do obliczeń wartości są tablicowane w histogramach. Użycie rozkładów ekstremalnych celem ominięcia problemu "bootstrappingu" w trakcie tworzenia bazy danych jest charakterystyczne dla tego konkretnego problemu, ale może być zastosowane do dowolnych danych będących sumą z wielu losowań z jednego rozkładu prawdopodobieństwa. Dalszy rozwój tej implementacji leży w możliwości szybkiej i stabilnej analizy wielu progów przez analizę głównych składowych lub inne podobne metody. Numeryczna niestabilność użytych algorytmów doprowadziła do pojawiania się ujemnych wartości własnych w macierzy kowariancji dla dużej liczby progów. Wartościowe jest uzyskanie dokładniejszych postaci omawianych macierzy korelacji i kowariancji - stworzone tu macierze, z dokładnością do poczynionych założeń, są wypełnione wartościami bezpośrednich zależności statystycznych pomiędzy poszczególnymi progami. Mam nadzieję, że praca przyczyni się do rozwoju projektu J-PET i będzie możliwy dalszy jej rozwój.

## Literatura

- [1] P. Moskal, T. Bednarski, P. Białas, M. Ciszewska, E. Czerwiński, A. Heczko, M. Kajetanowicz and Ł. Kapłon *et al.*, “TOF-PET detector concept based on organic scintillators,” Nucl. Med. Rev. **15** (2012) C81 [arXiv:1305.5559 [physics.ins-det]].
- [2] Hamamatsu, <http://www.hamamatsu.com>.
- [3] Saint gobain crystals, <http://www.crystals.saint-gobain.com>.
- [4] L. Raczyński *et al.*, Application of compressive sensing theory for the reconstruction of signals in plastic scintillators, Acta Phys. Polon. B Proceed. Suppl. 6 (2013) 1121–1127. doi:10.5506/APhysPolBSupp.6.1121.
- [5] M. Pałka *et al.*, A novel method based solely on FPGA units enabling measurement of time and charge of analog signals in Positron Emission Tomography, Bio-Algorithms and Med.-Systems 10 (1) (2014) 41–45. doi:10.1515/bams-2013-0104.
- [6] P. Moskal *et al.*, STRIP-PET: a novel detector concept for the TOF-PET scanner, Nucl. Med. Rev. 15 (2012) C68–C69.
- [7] P. Moskal *et al.*, TOF-PET detector concept based on organic scintillators, Nucl. Med. Rev. 15 (2012) C81–C84.
- [8] . M. Moszyński”, Status of timing with plastic scintillation detectors, Nucl. Instrum. Meth. 158 (1979) 1–31. doi:10.1016/S0029-554X(79)90170-8.
- [9] T. Bednarski *et al.*, Calibration of photomultipliers gain used in the j-pet detector, Bio-Algorithms and Med-Systems 10 (1) (2014) 13–17. doi:10.1515/bams-2013-0110.
- [10] ELJEN Techonology, <http://www.eljentechnology.com/index.php/products/plastic-scintillators/65-ej-228>.
- [11] L. Raczynski, P. Moskal, P. Kowalski, W. Wislicki, T. Bednarski, P. Bialas, E. Czerwinski and L. .Kaplon *et al.*, “Novel method for hit-position reconstruction using voltage signals in plastic scintillators and its application to Positron Emission Tomography,” arXiv:1407.8293 [physics.ins-det].
- [12] P. Moskal, S. Niedźwiecki, T. Bednarski, E. Czerwiński, Ł. Kapłon, E. Kubicz, I. Moskal and M. Pawlik-Niedźwiecka *et al.*, “Test of a single module of the J-PET scanner based on plastic scintillators,” Nuclear Inst. and Methods in



Physics Research A 764 (2014), pp. 317-321 [arXiv:1407.7395 [physics.ins-det]].

- [13] Andersen, B. Erling, “Asymptotic Properties of Conditional Maximum Likelihood Estimators,” *Journal of the Royal Statistical Society B* 32 (1970), pp. 283–301
- [14] K. Szymański, P. Moskal, T. Bednarski, P. Białas, E. Czerwiński, K. Giergiel, Ł. Kapłon and A. Kochanowski *et al.*, “Simulations of gamma quanta scattering in a single module of the J-PET detector,” *Bio-Algorithms and Med-Systems* 10(2), 71-77 (2014) [arXiv:1312.0250 [physics.ins-det]].
- [15] T. Bednarski, E. Czerwiński, P. Moskal, P. Białas, K. Giergiel, Ł. Kapłon, A. Kochanowski and G. Korcyl *et al.*, “Calibration of photomultipliers gain used in the J-PET detector,” *Bio-Algorithms and Med-Systems Volume* 10(1), 13-17 (2014) [arXiv:1312.2744 [physics.ins-det]].
- [16] B. Kamys, “Statystyczne metody opracowanie pomiarów -2,” *Notatki do wykładu* (2007/2008)
- [17] A. Dempster, N. Laird, D. Rubin, “Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 39 (1): 1–38 (1977) JSTOR 2984875.
- [18] L. Richardson, W. Hadley, “Bayesian-Based Iterative Method of Image Restoration,” *JOSA* 62 (1): 55–59 (1972) doi:10.1364/JOSA.62.000055.
- [19] L. Lucy, “An iterative technique for the rectification of observed distributions”, *Astronomical Journal* 79 (6): 745–754 (1974) doi:10.1086/111605.